โครงการสอน

รหัสวิชา 3000-1521 **ชื่อวิชา** คณิตศาสตร์ 2

(Mathematic 2)

หลักสูตร ประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง (ปวส.)พุทธศักราช 2546

แผนกวิชา สามัญสัมพันธ์ (วิทย์-คณิต)

อาจารย์ผู้สอน นางบุญนาค พลแย้ม

วิทยาลัยเทคโนโลยีพณิชยการอยุธยา

AYUTTHAYA TECHNOLOGICAL COMMERCIAL COLLEGE

การวิเคราะห์หลักสูตรวิชา คณิตศาสตร์ 2 (3000-1521)

สมมรรถนะของผู้เรียน

ระดับ 1

รู้ตั้งใจและรับรู้นิยาม กฎ และใช้สูตรในการคำนวณได้

ระดับ 2

เข้าใจและซักถาม นิยาม กฎวิธีการคำนวณได้อย่างถูกต้อง

ระดับ 3

นำสูตรไปใช้คำนวณแก้ปัญหาและยกตัวอย่างแล้วลอกเลียนแบบได้อย่างถูกต้อง

ระดับ 4

จำแนกสูตรมาแก้ปัญหาโจทย์และรับผิดชอบงานที่ได้รับมอบหมายจนสำเร็จตามคำสั่ง เพื่อสร้างความสัมพันธ์กับเนื้อหาอื่นๆ

ระดับ 5

สามารถเปรียบเทียบการเลือกใช้สูตรอย่างรอบครอบเหมาะสมแล้วเกิดความคิดริเริ่ม วิธีการคิดคำนวณวิธีใหม่ๆและประยุกต์ใช้แก้ปัญหาโจทย์อื่นได้

การประเมินคุณภาพ

สิ่งที่จะใช้ประเมิน การปฏิบัติจริง(แบบฝึกหัด)

ลักษณะแสดงคุณภาพ ความคิด , ประโยชน์ ,การประเมินคุณภาพ

รายการ	ระดับ		
	1	**3**	**5**
พุทธิพิสัย	ความรู้ / ความจำ	นำไปใช้	ประเมินค่า
ทักษะพิสัย	รับรู้จากการปฏิบัติ	การตอบสนอง	ริเริ่มสิ่งใหม่
จิตพิสัย	ตั้งใจ / รับรู้	เห็นคุณค่า	สร้างลักษณะนิสัย

คำอธิบาย

1	2	3	4	5
มีความรู้ในเรื่องนิยาม,กฎ	มีความเข้าใจนิยามและกฎ	คำนวณการใช้สูตรแก้ปัญหาและเปลี่ยนแปลง	จำแนกสูตรมาแก้ปัญหาโจทย์	ตัดสินใจเปรียบเทียบได้อย่างถูกต้อง
ใช้สูตรในการคำนวณได้	คิดวิธีการคำนวณได้อย่างถูกต้อง	ยกตัวอย่างแล้วลอกเลียนแบบได้	ปฏิบัติงานตามคำสั่งเพื่อสร้างความสัมพันธ์กับเนื้อหาอื่น	หาวิธีการเกิดการริเริ่มการคำนวณวิธีใหม่ๆได้
ตั้งใจและรับรู้นิยามและกฎ	สามารถซักถามนิยามและกฎ	นำสูตรไปใช้ในการแก้ปัญหาให้ถูกต้อง	รับผิดชอบงานที่ได้รับมอบหมายได้สำเร็จ	มีนิสัยละเอียดรอบครอบในการเลือกใช้สูตรตรวจสอบการคำนวณ

ลักษณะรายวิชา

รหัสและชื่อวิชา 3000-1521 คณิตศาสตร์ 2

สภาพรายวิชา -

ระดับวิชา ชั้นปวส.

พื้นฐาน -

เวลาเรียน 54 **คาบ ตลอดภาคเรียน** 18 **สัปดาห์ ทฤษฎี** 3 คาบ **ปฏิบัติ** 0 **- คาบ/สัปดาห์**

หน่วยกิต 3 **หน่วยกิต**

จุดประสงค์รายวิชา

1. เพื่อให้มีความรู้ความเข้าใจเรื่องฟังก์ชันแบบต่างๆ เมทริกซ์ ดีเทอร์มิแนนท์ และเรขาคณิตวิเคราะห์
2. เพื่อให้สามารถนำความรู้เรื่องฟังก์ชันแบบต่างๆ เมทริกซ์ ดีเทอร์มิแนนท์ และเรขาคณิตวิเคราะห์ไปใช้ประกอบในวิชาชีพ
3. เพื่อให้มีเจตคติที่ดี และเกิดความคิดรวบยอดเกี่ยวกับ เรื่องฟังก์ชันแบบต่างๆ เมทริกซ์ ดีเทอร์มิแนนท์ และเรขาคณิตวิเคราะห์

สมรรถนะรายวิชา

1. มีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับฟังก์ชันแบบต่างๆ และนำไปใช้แก้ปัญหา
2. มีความรู้ความเข้าใจทฤษฎีบททวินามและเศษส่วนย่อยและนำไปใช้แก้ปัญหา
3. มีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์ และนำไปใช้แก้ปัญหา
4. มีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับเมทริกซ์ ดีเทอร์มิแนนท์ และนำไปใช้แก้ปัญหา
5. สามารถนำความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันแบบต่างๆ เมทริกซ์ ดีเทอร์มิแนนท์ และเรขาคณิตวิเคราะห์ไปใช้เป็นพื้นฐานประกอบในวิชาชีพ

คำอธิบายรายวิชา

ศึกษาเกี่ยวกับฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลและลอการิทึม ฟังก์ชันตรีโกณมิติ และอินเวอร์สฟังก์ชันตรีโกณมติ กฎของไซน์และกฎของโคไซน์ ทฤษฎีทวินาม เศษส่วนย่อย ชนิดของเมทริกซ์ ดีเทอร์มิแนนท์ อินเวอร์สการคูณเทริกซ์ การแก้สมการเชิงเส้นด้วยเมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนท์ อินเวอร์การคูณเมทริกซ์ การแก้สมการเชิงเส้นด้วยเมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนท์ ระยะทางระหว่างจุดสองจุด จุดกึ่งกลางระหว่างจุดสองจุด ความชันรูแบบสมการเส้นตรง ภาคตัดกรวยที่มีจุดศูนย์กลางหรือจุดยอดอยู่ที่จุดใด ๆ ในระนาบ

โครงสร้างรายวิชา

3000-1521

คณิตศาสตร์ 2

หน่วยการเรียน	รายการสอน	คาบการเรียน		
		ทฤษฎี	ปฏิบัติ	รวม
1	ปฐมนิเทศ **1. ฟังก์ชัน** 1.1 ฟังก์ชันเอ็กซ์โปเนนเชียล 1.2 ฟังก์ลอการิทึม 1.3 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ 1.4 กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติและอินเวอร์สตรีโกณมิติ 1.5 ฟังก์ชันตรรกยะ 1.6 ทฤษฎีบททวินาม	**12**	**-**	**12**
2	**2. เมทริกซ์และดีเทอร์มิแมนท์** 2.1 ชนิดของเมทริกซ์ 2.2 การดำเนินการของเมทริกซ์ 2.3 สมบัติการบวกและการคูณของเมทริกซ์ 2.4 เมทริกซ์ผกผันสำหรับการคูณ 2.5 เมทริกซ์สลับเปลี่ยน 2.6 การหาค่าดีเทอร์มิแนนท์โดยการคูณทแยง 2.7 การกระจายโดยแฟกเตอร์ 2.8 การหาค่าดีเทอร์มิแนนท์โดยการคูณทแยง 2.9 แอดจอยท์หรือส่วนผูกพันของเมทริกซ์ 2.10 เมทริกซ์ผกผันสำหรับการคูณ 2.11 การแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้กฎของคราเมอร์	**12**		**12**

หน่วยการเรียน	รายการสอน	คาบการเรียน		
		ทฤษฎี	ปฏิบัติ	รวม
3	**3 เรขาคณิตวิเคราะห์** 3.1 ระยะทางระหว่างจุด 2 จุด 3.2 จุดกึ่งกลางระหว่างจุด 2 จุด 3.3 ความชันของเส้นตรง 3.4 เส้นขนานและเส้นตั้งฉาก 3.5 สมการเส้นตรง 3.6 ระยะทางระหว่างจุดกันเส้นตรง 3.7 ระยะทางระหว่างเส้นตรงกับเส้นตรง 3. 8 วงกลม 3.9 พาราโบลา 3.10 วงรี 3.11 ไฮเพอร์โบลา	**27**	**-**	**27**
	สอบปลายภาค	**3**		**3**
	รวม			**54**

กำหนดการสอน

สัปดาห์	วัน/เดือน/ปี	คาบที่	รายการสอน	หมายเหตุ
1		1-3	ปฐมนิเทศ 1 ฟังก์ชัน 1.1 ฟังก์ชันเอ็กซ์โปรแนนเชียล 1.2 ฟังก์ชันลอการิทึม	
2		4-6	1 ฟังก์ชัน 1.3 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ 1.4 กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติและอินเวอร์สตรีโกณมิติ	
3		7-9	1 ฟังก์ชัน 1.5 ฟังก์ชันตรรกยะ	
4		10-12	1 ฟังก์ชัน 1.6 ทฤษฎีบททวินาม	
5		13-15	2 เมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนท์ 2.1 ชนิดของเมทริกซ์ 2.2. การดำเนินการของเมทริกซ์ 2.3 สมบัติการบวกและการคูณของเมทริกซ์	
6		16-18	2 เมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนท์ 2.4 เมทริกซ์ผกผันสำหรับการคูณ 2.5 เมทริกซ์สลับเปลี่ยน	
7		19-21	2 เมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนท์ 2.6 การหาค่าดีเทอร์มิแนนท์โดยการคูณทแยง 2.7 การกระจายโคแฟกเตอร์ 2.8 การหาค่าดีเทอร์มิแนนท์โดยวิธีการกระจายโดยแฟกเตอร์	
8		22-24	2 เมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนท์ 2.9 แอดจอยท์และดีเทอร์มิแนนท์ 2.10 เมทริกซ์ผกผันสำหรับการคูณ	

กำหนดการสอน (ต่อ)

สัปดาห์	วัน/เดือน/ปี	คาบที่	รายการสอน	หมายเหตุ
9		25-27	2 เมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนท์ 2.11 การแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้กฎของคราเมอร์	
10		28-30	3 เราขาคณิตวิเคราะห์ 3.1 ระยะทางระหว่างจุด 2 จุด 3.2 จุดกึ่งกลางระหว่างจุด 2 จุด 3.3 ความชันของเส้นตรง	
11		31-33	3 เรขาคณิตวิเคราะห์ 3.4 เส้นขนานและเส้นตั้งฉาก 3.5 สมการเส้นตรง	
12		34-36	3 เรขาคณิตวิเคราะห์ 3.6 ระยะทางระหว่างจุดกับเส้นตรง 3.7 ระยะทางระหว่างเส้นตรงและเส้นตรง	
13		37-39	3 เรขาคณิตวิเคราะห์ 3.8 วงกลม	
14		40-42	3 เรขาคณิตวิเคราะห์ 3.9 พาราโบลา	
15		43-45	3 เรขาคณิตวิเคราะห์ 3.10 วงรี	
16		46-48	3 เรขาคณิตวิเคราะห์ 3.10 วงรี	
17		49-51	3 เรขาคณิตวิเคราะห์ 3.11 ไฮเพอร์โบลา	
18		52-54	สอบปลายภาค	

การประเมินผลรายวิชา

วิชานี้ได้แบ่งเป็น ___3___ หน่วยเรียน และ แยกได้ ___28___ หัวข้อ

การวัดผลและประเมินผลจะดำเนินการดังนี้

1. วิธีการ ดำเนินการรวบรวมข้อมูล เพื่อการประเมินผล แยกเป็น 2 ส่วน

โดยแบ่งแยกคะแนนแต่ละส่วนจากคะแนนเต็ม 100 คะแนน (หรือตามที่โรงเรียนกำหนดสัดส่วนแต่ละรายวิชา)

1. คะแนนระหว่างภาคเรียน	60	คะแนน หรือ 60%
1.1 การทดสอบแต่ละหน่วยเรียน	30	คะแนน หรือ 30%
1.2 เวลาเรียน	10	คะแนน หรือ 10%
1.3 พิจารณาผลงานที่มอบหมาย	10	คะแนน หรือ 10%
1.4 พิจารณาการเข้าร่วมกิจกรรม	5	คะแนน หรือ 5%
1.5 พิจารณากิจนิสัยความสนใจ	5	คะแนน หรือ 5%
2. คะแนนสอบปลายภาคเรียน	40	คะแนน หรือ 40%

2. เกณฑ์ผ่าน ผู้ที่จะผ่านรายวิชานี้จะต้อง

2.1 มีเวลาเข้าชั้นเรียนไม่ต่ำกว่า ร้อยละ 80

2.2 ต้องเข้าสอบปลายภาคเรียน

2.3 ได้ผลรวมคะแนนที่ทำได้ทั้งหมดต้องไม่ต่ำกว่า ร้อยละ 50

3. เกณฑ์ค่าระดับคะแนน

3.1 พิจารณาเกณฑ์ผ่านรายวิชาตามข้อ 2. ผู้ที่ไม่ผ่านเกณฑ์ข้อ 2. จะได้รับค่าระดับคะแนน 0 หรือ F

3.2 ผู้ที่สอบผ่านเกณฑ์ข้อ 2. จะได้รับค่าระดับคะแนนตามเกณฑ์ดังนี้

3.3 ผู้ที่สอบผ่านเกณฑ์ข้อ 2. จะได้รับค่าระดับคะแนนตามเกณฑ์ดังนี้

หลักสูตรกรมอาชีวศึกษา

คะแนนร้อยละ	80 – 100	ได้ 4
คะแนนร้อยละ	75 – 79	ได้ 3.5
คะแนนร้อยละ	70 – 74	ได้ 3
คะแนนร้อยละ	65 – 69	ได้ 2.5
คะแนนร้อยละ	60 – 64	ได้ 2
คะแนนร้อยละ	55 – 59	ได้ 1.5
คะแนนร้อยละ	50 – 54	ได้ 1
ต่ำกว่าร้อยละ	50	ได้ 0

ตารางวิเคราะห์หลักสูตร ประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง

รายวิชา 3000 - 1521 **คณิตศาสตร์ 2** **ชั้น** ปวส.

เนื้อหา	พุทธิพิสัย						จิตพิสัย					ทักษะพิสัย					
	จำ	ใจ	ใช้	วิ	สัง	ประ	รู้	สนอง	ให้คุณค่า	จัดระบบ	ลักษณะ	รู้	พร้อม	กลไก	สนองที่ซับซ้อน	ดัดแปลง	ริเริ่ม
1. ฟังก์ชันแบบต่างๆ	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/
2. เมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนท์	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/
3. เรขาคณิตวิเคราะห์	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/

ตารางวิเคราะห์หลักสูตรรายวิชา

วิชา 3000 – 1521 คณิตศาสตร์ 2

ตารางเฉลี่ย

พฤติกรรม / เนื้อหา	พุทธิพิสัย						ทักษะพิสัย			จิตพิสัย	รวม	อันดับความสำคัญ	ประเมินผล / คาบเรียน
	ความรู้	ความเข้าใจ	การนำไปใช้	วิเคราะห์	สังเคราะห์	ประเมินค่า	การเลียนแบบ	การลงมือทำตามแบบ	ความถูกต้อง	ความรับผิดชอบ มีระเบียบวินัย			
	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	100		
1. ฟังก์ชันแบบต่างๆ	3.3	3.3	3.0	3.0	3.0	3.0	3.0	3.0	3.3	2.7	31		12
2. เมทริกซ์และดีเทอร์-มิแนนท์	3.7	4.0	3.0	3.3	2.7	2.7	3.3	3.0	3.3	3.0	32		12
3. เรขาคณิต-วิเคราะห์	8.7	8.7	7.3	8.7	7.8	6.3	9.0	4.3	6.7	3.3	71		27
รวม	15.7	16	13.7	15	13.5	12	15.3	10.3	13.3	9	134		
อันดับความสำคัญ	2	1	6	4	7	9	3	5	8	10			

ตารางวิเคราะห์หลักสูตรรายวิชา

วิชา 3000 – 152 1คณิตศาสตร์ 2

ตารางบุคคล ชื่อ นาง บุญนาค **นามสกุล** พลแย้ม

พฤติกรรม / เนื้อหา	พุทธิพิสัย						ทักษะพิสัย			จิตพิสัย	รวม	อันดับความสำคัญ
	ความรู้	ความเข้าใจ	การนำไปใช้	วิเคราะห์	สังเคราะห์	ประเมินค่า	การเขียนแบบ	การลงมือทำตามแบบ	ความถูกต้อง	ความรับผิดชอบ มีระเบียบวินัย		
	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	100	
1. ฟังก์ชันแบบต่างๆ	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**4**	**3**		
2. เมทริกซ์และดีเทอร์-มิแนนท์	**3**	**4**	**3**	**3**	**3**	**2**	**3**	**3**	**3**	**3**		
3. เรขาคณิต-วิเคราะห์	**10**	**10**	**8**	**8**	**7**	**7**	**8**	**8**	**8**	**3**		
รวม												
อันดับความสำคัญ												

ตารางวิเคราะห์หลักสูตรรายวิชา

วิชา 3000 – 1521คณิตศาสตร์ 2

ตารางบุคคล ชื่อ นาง สมพร **นามสกุล** รัตนสาคร

พฤติกรรม / เนื้อหา	พุทธิพิสัย						ทักษะพิสัย			จิตพิสัย	รวม	อันดับความสำคัญ
	ความรู้	ความเข้าใจ	การนำไปใช้	วิเคราะห์	สังเคราะห์	ประเมินค่า	การเลียนแบบ	การลงมือทำตามแบบ	ความถูกต้อง	ความรับผิดชอบ มีระเบียบวินัย		
	10	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**100**	
1. ฟังก์ชันแบบต่างๆ	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**		
2. เมทริกซ์และดีเทอร์-มิแนนท์	**4**	**4**	**2**	**4**	**3**	**3**	**3**	**3**	**4**	**3**		
3. เรขาคณิต-วิเคราะห์	**8**	**8**	**7**	**9**	**7**	**6**	**10**	**8**	**6**	**4**		
รวม												
อันดับความสำคัญ												

ตารางวิเคราะห์หลักสูตรรายวิชา

วิชา 3000 – 1521 คณิตศาสตร์ 2

ตารางบุคคล ชื่อ นางสาว สวง **นามสกุล** บุญรอต

พฤติกรรม / เนื้อหา	พุทธิพิสัย						ทักษะพิสัย			จิตพิสัย	รวม	อันดับความสำคัญ
	ความรู้	ความเข้าใจ	การนำไปใช้	วิเคราะห์	สังเคราะห์	ประเมินค่า	การเขียนแบบ	การลงมือทำตามแบบ	ความถูกต้อง	ความรับผิดชอบ มีระเบียบวินัย		
	10	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**100**	
1. ฟังก์ชันแบบต่างๆ	**4**	**4**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**		
2. เมทริกซ์และดีเทอร์-มิแนนท์	**4**	**4**	**4**	**3**	**2**	**3**	**4**	**3**	**3**	**3**		
3. เรขาคณิต-วิเคราะห์	**8**	**8**	**7**	**9**	**9**	**6**	**9**	**7**	**6**	**3**		
รวม												
อันดับความสำคัญ												

แผนเตรียมการสอน

สัปดาห์ที่ 1	**วิทยาลัยเทคโนโลยีพณิชยการอยุธยา**	**วันที่**
รหัส 3000-2521	**วิชา** คณิตศาสตร์ 2	**ท-ป-น** 3 – 0 – 3
หน่วยที่ 1	**ชื่อหน่วย** ฟังก์ชัน	**เวลา** 3 **คาบ**

เรื่อง ฟังก์ชัน

สาระการเรียนรู้

1.1 ฟังก์ชันเอ็กซ์โปแนนเชียล

1.2 ฟังก์ชันลอการิทึม

สาระสำคัญ

ฟังก์ชันเอ็กโปแนนเชียล คือ ฟังก์ชันที่เขียนในรูป $f(x) = a^x$, $a > 0$ และ $a \neq 1$ เป็นจำนวนจริงใด ๆ

ฟังก์ชันลอการิทึม คือ ฟังก์ชันที่เขียนในรูป $f(x) = exp(x) = e^x$ เมื่อ $e = 2.71828$

มาตรฐานการเรียนรู้

1. บอกความหมายของฟังก์ชันเอ็กซ์โปแนนเชียลได้
2. หาค่าของฟังก์ชันเอ็กซ์โปแนนเชียลได้
3. บอกความหมายของฟังก์ชันลอการิทึมได้
4. หาค่าลอการิทึมกับฐานต่าง ๆ ได้
5. นำความรู้เรื่องฟังก์ชันเอ็กซ์โปแนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึมไปประยุกต์ใช้ในวิชาชีพและชีวิตประจำวันได้

กระบวนการเรียนรู้

1. ขั้นนำ

- ปฐมนิเทศ
- ผู้สอนทักทายนักศึกษา สร้างความคุ้นเคย เกริ่นนำ เข้าเนื้อหา
- ทบทวนเลขยกกำลัง
- การแทนค่าของสมการ

2. ขั้นการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

1. ผู้สอนให้นักศึกษาแนะนำตนเอง แนะนำการเรียนคณิตศาสตร์
2. ผู้สอนชี้แจงเนื้อหาที่จะเรียนในภาคนี้ ตลอดจนการปฏิบัติตนในขณะเรียนการจัดการเรียนการสอน การวัดและการประเมินผล คุณธรรม จริยธรรม ค่านิยมและคุณลักษณะอันพึงประสงค์
3. ผู้สอนอธิบายวิธีการหาฟังก์ชันเอ็กซ์โปแนนเชียล ฟังก์ชันลอการิทึม
4. ผู้สอนให้ผู้เรียนทำแบบฝึกหัด

3. ขั้นสรุป

ผู้สอนและผู้เรียนช่วยกันสรุปฟังก์ชันเอ็กซ์โปแนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม

กระบวนการวัดและการประเมินผล

วิธีวัดผล

1. สังเกตจากการตรวจแบบฝึกหัด
2. ประเมินพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์

เครื่องมือวัดผล

1. แบบประเมินผลคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ โดยผู้สอนและผู้เรียน
2. แบบฝึกหัด

เกณฑ์การประเมิน

1. แบบประเมินคุณธรรม จริยธรรม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ ครั้งละ 10 คะแนน โดยตั้งเกณฑ์ได้ 6 คะแนนผ่าน
2. ตรวจแบบฝึกหัด

แหล่งการเรียนรู้ / สื่ออุปกรณ์การเรียนการสอน

1. หนังสือรายวิชาคณิตศาสตร์ 2 (3000-1521)
2. แบบฝึกหัดท้ายบทเรียน
3. ห้องสมุดของวิทยาลัยเทคโนโลยีพณิชยการอยุธยา

บันทึกหลังการสอน

1. ผลการสอน

2. ปัญหา/ อุปสรรค

3. ข้อเสนอแนะ/ แนวทางแก้ไข

แผนเตรียมการสอน

สัปดาห์ที่ 2	**วิทยาลัยเทคโนโลยีพณิชยการอยุธยา**	**วันที่**
รหัส 3000-1521	**วิชา** คณิตศาสตร์ 2	**ท-ป-น** 3 – 0 – 3
หน่วยที่ 1	**ชื่อหน่วย** ฟังก์ชัน	**เวลา** 3 **คาบ**

เรื่อง ฟังก์ชัน (ต่อ)

สาระการเรียนรู้

1.4 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

1.5 กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติและอินเวอร์สตรีโกณมิติ

สาระสำคัญ

ความต่อเนื่องของฟังก์ชันเป็นพื้นฐานที่สำคัญในการศึกษาแคลคูลัส และฟังก์ชันที่จะหาอนุพันธ์ได้ ต้องเป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

มาตรฐานการเรียนรู้

1. สามารถหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมต่าง ๆ ได้
2. สามารถเขียนกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติและอินเวอร์สฟังก์ชันตรีโกณมิติได้
3. สามารถนำความรู้เรื่องตรีโกณมิติไปประยุกต์ใช้ในงานวิชาชีพและชีวิตประจำวัน

กระบวนการเรียนรู้

1. ขั้นนำ

ทบทวนเรื่องค่าของมุม $sin\theta, cos\theta, tan\theta, cos\theta, sec\theta, cosec\theta$

2. ขั้นการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

1. ผู้สอนอธิบายเรื่องการหาค่าของมุมของฟังก์ชันตรีโกณมิติ
2. ผู้สอนอธิบายวิธีการหาโดยใช้กฎของไซน์, โคไซน์พร้อมตัวอย่างประกอบ
3. แบ่งกลุ่มผู้เรียนเป็นกลุ่ม ๆ ละ 5 คน ทำงานจากใบงานที่กำหนดให้

3. ขั้นสรุป

ผู้สอนและผู้เรียนช่วยกันสรุป ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

กระบวนการวัดและการประเมินผล

วิธีวัดผล

1. สังเกตจากการตรวจแบบฝึกหัด
2. ประเมินพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์

เครื่องมือวัดผล

1. แบบประเมินผลคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ โดยผู้สอนและผู้เรียน
2. แบบฝึกหัด

เกณฑ์การประเมิน

1. แบบประเมินคุณธรรม จริยธรรม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ ครั้งละ 10 คะแนน โดยตั้งเกณฑ์ได้ 6 คะแนนผ่าน
2. ตรวจแบบฝึกหัด

แหล่งการเรียนรู้ / สื่ออุปกรณ์การเรียนการสอน

1. หนังสือรายวิชาคณิตศาสตร์ 2 (3000-1521)
2. แบบฝึกหัดท้ายบทเรียน
3. ห้องสมุดของวิทยาลัยเทคโนโลยีพณิชยการอยุธยา

บันทึกหลังการสอน

1. ผลการสอน

2. ปัญหา/อุปสรรค

3. ข้อเสนอแนะ/แนวทางแก้ไข

แผนเตรียมการสอน

สัปดาห์ที่ 3	**วิทยาลัยเทคโนโลยีพณิชยการอยุธยา**	**วันที่**
รหัส 3000-1521	**วิชา** คณิตศาสตร์ 2	**ท-ป-น** 3 – 0 – 3
หน่วยที่ 1	**ชื่อหน่วย** ฟังก์ชัน	**เวลา** 3 **คาบ**

เรื่อง ฟังก์ชัน

สาระการเรียนรู้

1.5 ฟังก์ชันชันตรรกยะ

สาระสำคัญ

ฟังก์ชันตรรกยะมี 2 ชนิด คือ

1. ฟังก์ชันตรรกยะที่เป็นเศษส่วนแท้ คือฟังก์ชันตรรกยะที่กำลังของ $P(x)$ น้อยกว่า กำลังของ $q(x)$ เช่น $\frac{2x-3}{x^2+3x+2}$

2. ฟังก์ชันตรรกยะที่ไม่เป็นเศษส่วนแท้ คือ ฟังก์ชันตรรกยะที่กำลังของ $P(x)$ มากกว่าหรือเท่ากับกำลังของ $q(x)$ เช่น $\frac{x^3}{x^2-2x+1}$

มาตรฐานการเรียนรู้

1. บอกรูปแบบของฟังก์ชันตรรกยะได้

2. แยกฟังก์ชันตรรกยะเป็นเศษส่วนย่อยได้

กระบวนการเรียนรู้

1. ขั้นนำ

ทบทวน การแยกตัวประกอบ ผลต่างกำลังสอง ผลต่างกำลังสาม

2. ขั้นการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

1.ผู้สอนอธิบายเรื่องฟังก์ชันตรรกยะ วิธีการแยกเศษส่วน พหุนาม

2.ผู้สอนอธิบายพร้อมยกตัวอย่างเปรียบเทียบ

3.ผู้เรียนทำแบบฝึกหัด

3. ขั้นสรุป

- ผู้สอนและผู้เรียนช่วยกันสรุปฟังก์ชันตรรกยะ

กระบวนการวัดและการประเมินผล

วิธีวัดผล

1. สังเกต จากการซักถาม จากการตรวจแบบฝึกหัด
2. ประเมินพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์

เครื่องมือวัดผล

1. แบบประเมินผลคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ โดยผู้สอนและผู้เรียน
2. แบบฝึกหัด

เกณฑ์การประเมิน

1. แบบประเมินคุณธรรม จริยธรรม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ ครั้งละ 10 คะแนน โดยตั้งเกณฑ์ได้ 6 คะแนนผ่าน
2. ตรวจแบบฝึกหัด

แหล่งการเรียนรู้ / สื่ออุปกรณ์การเรียนการสอน

1. หนังสือรายวิชาคณิตศาสตร์ 2 (3000-1521)
2. แบบฝึกหัดท้ายบทเรียน
3. ห้องสมุดของวิทยาลัยเทคโนโลยีพณิชยการอยุธยา

บันทึกหลังการสอน

1. ผลการสอน

2. ปัญหา/อุปสรรค

3. ข้อเสนอแนะ/แนวทางแก้ไข

แผนเตรียมการสอน

สัปดาห์ที่ 4	**วิทยาลัยเทคโนโลยีพณิชยการอยุธยา**	**วันที่**
รหัส 3000-1521	**วิชา** คณิตศาสตร์ 2	**ท-ป-น** 3 – 0 – 3
หน่วยที่ 1	**ชื่อหน่วย** ฟังก์ชัน	**เวลา** 3 **คาบ**

เรื่อง ฟังก์ชัน (ต่อ)

สาระการเรียนรู้

1.6 ทฤษฎีบททวินาม

สาระสำคัญ

แฟกทอเรียลของ n เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก คือ $n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots$ ถ้า n และ r เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $0 \leq r \leq n$ แล้ว

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$$

มาตรฐานการเรียนรู้

1. สามารถกระจายโดยใช้ทฤษฎีบททวินามได้
2. สามารถกระจายโดยใช้สามารถเหลี่ยมปาสกาลได้
3. สามารถใช้ทฤษฎีบททวินามคำนวณหาค่าประมาณที่ต้องการผลลัพธ์ที่มีความละเอียดสูงสุด

กระบวนการเรียนรู้

1. ขั้นนำ

ทบทวนการหาผลคูณของจำนวนตัวเลข, เลขยกกำลัง

2. ขั้นการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

1. ผู้สอนอธิบายเกี่ยวกับการหาแฟกทอเรียล
2. ผู้สอนให้ผู้เรียนศึกษาจากใบงานแล้วอธิบาย พร้อมยกตัวอย่างประกอบ
3. ผู้เรียนทำแบบฝึกหัด

3. ขั้นสรุป

-ผู้สอนและผู้เรียนช่วยกันสรุปทฤษฎีบททวินาม

กระบวนการวัดและการประเมินผล

วิธีวัดผล

1. สังเกตจากการซักถาม จากการตรวจแบบฝึกหัด
2. ประเมินพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์

เครื่องมือวัดผล

1. แบบประเมินผลคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ โดยผู้สอนและผู้เรียน
2. แบบฝึกหัด

เกณฑ์การประเมิน

1. แบบประเมินคุณธรรม จริยธรรม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ ครั้งละ 10 คะแนน โดยตั้งเกณฑ์ได้ 6 คะแนนผ่าน
2. ตรวจแบบฝึกหัด

แหล่งการเรียนรู้ / สื่ออุปกรณ์การเรียนการสอน

1. หนังสือรายวิชาคณิตศาสตร์ 2 (3000-1521)
2. แบบฝึกหัดท้ายบทเรียน
3. ห้องสมุดของวิทยาลัยเทคโนโลยีพณิชยการอยุธยา

บันทึกหลังการสอน

1. ผลการสอน

2. ปัญหา/อุปสรรค

3. ข้อเสนอแนะ/แนวทางแก้ไข

แผนเตรียมการสอน

สัปดาห์ที่ 5	**วิทยาลัยเทคโนโลยีพณิชยการอยุธยา**	**วันที่**
รหัส 3000-1521	**วิชา** คณิตศาสตร์ 2	**ท-ป-น** 3 – 0 – 3
หน่วยที่ 2	**ชื่อหน่วย** เมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนท์	**เวลา** 3 **คาบ**

เรื่อง เมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนท์

สาระการเรียนรู้

2.1 ชนิดของเมทริกซ์

2.2 การดำเนินการของเมทริกซ์

2.3 สมบัติการบวกและการคูณเมทริกซ์

สาระสำคัญ

เมทริกซ์ คือ กลุ่มตัวเลขที่นำมาเรียงกันอยู่ในวงเล็บ [ ] หรือ ( )

การเท่ากันของเมทริกซ์จะเท่ากัน เมื่อมีขนาดเทากันและสมาชิกที่อยู่ในตำแหน่งเดียวกันเท่ากัน

มาตรฐานการเรียนรู้

1. บอกความหมายของเทมริกซ์ได้
2. บอกเงื่อนไขที่ทำให้เมทริกซ์เท่ากันได้
3. อธิบายสมบัติการบวกและการคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์ได้

กระบวนการเรียนรู้

1. ขั้นนำ

- ทบทวนจำนวนกลุ่มตัวเลข จำนวนแถว จำนวนหลัก

2. ขั้นการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

1. ผู้สอนให้ผู้เรียนศึกษาความหมายของเมทริกซ์และชนิดของเมทริกซ์จากหนังสือเรียน
2. ผู้สอนช่วยอธิบายความแตกต่างของเมทริกซ์และวิธีการคำนวณการบวก การลบ การคูณเมทริกซ์ พร้อมตัวอย่าง
3. ผู้เรียนทำแบบฝึกหัด

3. ขั้นสรุป

- ผู้สอนและผู้เรียนช่วยกันสรุปเมทริกซ์

กระบวนการวัดและการประเมินผล

วิธีวัดผล

1. สังเกตจากการซักถามจากการตรวจแบบฝึกหัด
2. ประเมินพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์

เครื่องมือวัดผล

1. แบบประเมินผลคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ โดยผู้สอนและผู้เรียน
2. แบบฝึกหัด

เกณฑ์การประเมิน

1. แบบประเมินคุณธรรม จริยธรรม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ ครั้งละ 10 คะแนน โดยตั้งเกณฑ์ได้ 6 คะแนนผ่าน
2. ตรวจแบบฝึกหัดเก็บคะแนน

แหล่งการเรียนรู้ / สื่ออุปกรณ์การเรียนการสอน

1. หนังสือรายวิชา คณิตศาสตร์ 2 (3000-1521)
2. แบบฝึกหัดท้ายบทเรียน
3. ห้องสมุดของวิทยาลัยเทคโนโลยีพณิชยการอยุธยา

บันทึกหลังการสอน

1. ผลการสอน

2. ปัญหา/อุปสรรค

3. ข้อเสนอแนะ/แนวทางแก้ไข

แผนเตรียมการสอน

สัปดาห์ที่ 6	**วิทยาลัยเทคโนโลยีพณิชยการอยุธยา**	**วันที่**
รหัส 3000-1521	**วิชา** คณิตศาสตร์ 2	**ท-ป-น** 3 – 0 – 3
หน่วยที่ 2	**ชื่อหน่วย** เมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนท์	**เวลา** 3 **คาบ**

เรื่อง เมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนท์

สาระการเรียนรู้

2.4 เมทริกซ์ผกผันสำหรับการคูณ

2.5 เมทริกซ์สลับเปลี่ยน

สาระสำคัญ

อนุพันธ์เป็นเรื่องที่มีความสำคัญต่อการศึกษาคณิตศาสตร์ ในระดับสูงเป็นอย่างยิ่งสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในสาขาอื่นๆได้เกือบทุกสาขา

มาตรฐานการเรียนรู้

1. หาเมทริกซ์ผกผันสำหรับกาคูณได้
2. หาเมทริกซ์สลับเปลี่ยนได้

กระบวนการเรียนรู้

1. ขั้นนำ

ทบทวนการคำนวณ ลักษณะของเมทริกซ์

2. ขั้นการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

1. ผู้สอนอธิบายการหาเมทริกซ์ผกผัน โดยการใช้สูตรพร้อมยกตัวอย่าง
2. ผู้สอนอธิบายเมทริกซ์สลับเปลี่ยน พร้อมยกตัวอย่าง
3. ผู้เรียนทำแบบฝึกหัด

3. **ขั้นสรุป**

ผู้สอนและผู้เรียนช่วยกันสรุปเมทริกซ์

กระบวนการวัดการประเมินผล

วิธีวัดผล

1. สังเกตจากการตรวจแบบฝึกหัด
2. ประเมินพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์

เครื่องมือวัดผล

1. แบบประเมินผลคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ โดยผู้สอนและผู้เรียน
2. แบบฝึกหัด

เกณฑ์การประเมิน

1. แบบประเมินคุณธรรม จริยธรรม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ ครั้งละ 10 คะแนน โดยตั้งเกณฑ์ได้ 6 คะแนนผ่าน
2. ตรวจแบบฝึกหัดเก็บคะแนน

แหล่งการเรียนรู้ / สื่ออุปกรณ์การเรียนการสอน

1. หนังสือรายวิชาคณิตศาสตร์ 2 (3000-1521)
2. แบบฝึกหัดท้ายบทเรียน
3. ห้องสมุดของวิทยาลัยเทคโนโลยีพณิชยการอยุธยา

บันทึกหลังการสอน

1. ผลการสอน

2. ปัญหา/อุปสรรค

3. ข้อเสนอแนะ/แนวทางแก้ไข

แผนเตรียมการสอน

สัปดาห์ที่ 7	**วิทยาลัยเทคโนโลยีพณิชยการอยุธยา**	**วันที่**
รหัส 3000-1521	**วิชา** คณิตศาสตร์ 2	**ท-ป-น** 3 – 0 – 3
หน่วยที่ 2	**ชื่อหน่วย** เมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนท์	**เวลา** 3 **คาบ**

เรื่อง เมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนท์

สาระการเรียนรู้

2.6 การหาค่าดีเทอร์มิแนนท์ โดยการคูณทแยง

2.7 การกระจายโคแฟกเตอร์

2.8 การหาค่าดีเทอร์มิแนนท์ โดยวิธีการกระจายโคแฟกเตอร์

สาระสำคัญ

การหาค่าดีเทอร์มิแนนท์มี 2 วิธี คือ

-การหาค่าดีเทอร์มิแนนท์ โดยการคูณทแยง เฉพาะ $2x2$, $3x3$

-การหาค่าดีเทอร์มิแนนท์ โดยการกระจายดคแฟกเตอร์

มาตรฐานการเรียนรู้

1. สามารถหาค่าดีเทอร์มิแนนท์ โดยการคูณทแยงได้
2. สามารถหาค่าดีเทอร์มิแนนท์ โดยวิธีการกระจายโคแฟกเตอร์ได้

กระบวนการเรียนรู้

1. ขั้นนำ

ทบทวนเมทริกซ์เบื้องต้น

2. ขั้นการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

1. ผู้สอนอธิบายการหาค่าดีเทอร์มิแนนท์ โดยการคูณทแยงและหาโดยวิธีการกระจายโคแฟกเตอร์ พร้อมยกตัวอย่าง
2. ผู้เรียนทำแบบฝึกหัด

3. ขั้นสรุป

ผู้สอนและผู้เรียนช่วยกันสรุปการหาค่าดีเทอร์มิแนนท์

กระบวนการวัดประเมินผล

วิธีวัดผล

1. สังเกตจากการซักถามจากการตรวจแบบฝึกหัด
2. ประเมินพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์

เครื่องมือวัดผล

1. แบบประเมินผลคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ โดยผู้สอนและผู้เรียน
2. แบบฝึกหัด

เกณฑ์การประเมิน

1. แบบประเมินคุณธรรม จริยธรรม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ ครั้งละ 10 คะแนน โดยตั้งเกณฑ์ได้ 6 คะแนนผ่าน
2. ตรวจแบบฝึกหัดเก็บคะแนน

แหล่งการเรียนรู้ / สื่ออุปกรณ์การเรียนการสอน

1. หนังสือรายวิชาคณิตศาสตร์ 2 (3000-1521)
2. แบบฝึกหัดท้ายบทเรียน
3. ห้องสมุดของวิทยาลัยเทคโนโลยีพณิชยการอยุธยา

บันทึกหลังการสอน

1. ผลการสอน

2. ปัญหา/อุปสรรค

3. ข้อเสนอแนะ/แนวทางแก้ไข

แผนเตรียมการสอน

สัปดาห์ที่ 8	**วิทยาลัยเทคโนโลยีพณิชยการอยุธยา**	**วันที่**
รหัส 3000-1521	**วิชา** คณิตศาสตร์ 2	**ท-ป-น** 3 – 0 – 3
หน่วยที่ 2	**ชื่อหน่วย** เมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนท์	**เวลา** 3 **คาบ**

เรื่อง เมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนท์

สาระการเรียนรู้

2.9 แอดจอยท์หรือส่วนผูกพันของเมทริกซ์

2.10 เมทริกซ์ผกผันสำหรับการคูณ

สาระสำคัญ

แอดจอยท์ หรือส่วนผูกผันของเมทริกซ์ A เขียนแทนด้วย adjA และ $adjA = [C_{ij}]^T$

เมทริกซ์ผกผันสำหรับการคูณ $A^{-1} = \frac{1}{detA} adjA$

มาตรฐานการเรียนรู้

1. คำนวณหาแอดจอยท์หรือส่วนผกผันของเมทริกซ์ได้
2. คำนวณหาเมทริกซ์ผกผันสำหรับการคูณได้

กระบวนการเรียนรู้

1. ขั้นนำ

ทบทวนการหาค่าดีเทอร์มิแนนท์ โดยการหาโคแฟกเตอร์

2. ขั้นการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

1. ผู้สอนอธิบายการหาค่าโคแฟกเตอร์และเมทริกซ์สลับเปลี่ยนจะได้แอดจอยด์ของเมทริกซ์ ตลอดจนหาเมทริกซ์ผกผันพร้อมตัวอย่างประกอบ

2. ผู้เรียนทำแบบฝึกหัด

3. ขั้นสรุป

ผู้สอนและผู้เรียนช่วยกันสรุปการหาเมทริกซ์ผกผัน

กระบวนการวัดประเมินผล

วิธีวัดผล

1. สังเกตจากการซักถามจากการตรวจแบบฝึกหัด
2. ประเมินพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์

เครื่องมือวัดผล

1. แบบประเมินผลคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ โดยผู้สอนและผู้เรียน
2. แบบฝึกหัด

เกณฑ์การประเมิน

1. แบบประเมินคุณธรรม จริยธรรม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ ครั้งละ 10 คะแนน โดยตั้งเกณฑ์ได้ 6 คะแนนผ่าน
2. ตรวจแบบฝึกหัด

แหล่งการเรียนรู้ / สื่ออุปกรณ์การเรียนการสอน

1. หนังสือรายวิชาคณิตศาสตร์ 2 (3000-1521)
2. แบบฝึกหัดท้ายบทเรียน
3. ห้องสมุดของวิทยาลัยเทคโนโลยีพณิชยการอยุธยา

บันทึกหลังการสอน

1. ผลการสอน

2. ปัญหา/อุปสรรค

3. ข้อเสนอแนะ/แนวทางแก้ไข

แผนเตรียมการสอน

สัปดาห์ที่ 9	**วิทยาลัยเทคโนโลยีพณิชยการอยุธยา**	**วันที่**
รหัส 3000-1521	**วิชา** คณิตศาสตร์ 2	**ท-ป-น** 3 – 0 – 3
หน่วยที่ 2	**ชื่อหน่วย** เมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนท์	**เวลา** 3 **คาบ**

เรื่อง เมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนท์

สาระการเรียนรู้

2.11 การแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้กฎของคราเมอร์

สาระสำคัญ

การแก้ระบบสมการเชิงเส้น โดยใช้เมทริกซ์ผกผันสำหรับการคูณ , กฎของคราเมอร์

มาตรฐานการเรียนรู้

1. แก้ระบบสมการเชิงเส้น โดยใช้เมทริกซ์ผกผันสำหรับการคูณได้
2. แก้ระบบสมการเชิงเส้น โดยใช้กฎของคราเมอร์ได้

กระบวนการเรียนรู้

1. ขั้นนำ

ทบทวนการหาค่าดีเทอร์มิแนนท์การคูณทแยง

2. ขั้นการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

1. ผู้สอนอธิบายการหาระบบสมการเชิงเส้น พร้อมตัวอย่าง
2. ผู้เรียนทำแบบฝึกหัด
3. ผู้เรียนออกมาทำหน้าชั้นเรียน

3. **ขั้นสรุป**

ผู้สอนและผู้เรียนช่วยกันสรุปการหาค่าระบบสมการเชิงเส้น

กระบวนการวัดประเมินผล

วิธีวัดผล

1. สังเกตจากการซักถาม จากการตรวจสอบแบบฝึกหัด
2. ประเมินพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์

เครื่องมือวัดผล

1. แบบประเมินผลคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ โดยผู้สอนและผู้เรียน
2. แบบฝึกหัด

เกณฑ์การประเมิน

1. แบบประเมินคุณธรรม จริยธรรม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ ครั้งละ 10 คะแนน โดยตั้งเกณฑ์ได้ 6 คะแนนผ่าน
2. ตรวจแบบฝึกหัดเก็บคะแนน

แหล่งการเรียนรู้ / สื่ออุปกรณ์การเรียนการสอน

1. หนังสือรายวิชาคณิตศาสตร์ 2 (3000-1521)
2. แบบฝึกหัดท้ายบทเรียน
3. ห้องสมุดของวิทยาลัยเทคโนโลยีพณิชยการอยุธยา

บันทึกหลังการสอน

1. ผลการสอน

2. ปัญหา/อุปสรรค

3. ข้อเสนอแนะ/แนวทางแก้ไข

แผนเตรียมการสอน

สัปดาห์ที่ 10	**วิทยาลัยเทคโนโลยีพณิชยการอยุธยา**	**วันที่**
รหัส 3000-1521	**วิชา** คณิตศาสตร์ 2	**ท-ป-น** 3 – 0 – 3
หน่วยที่ 3	**ชื่อหน่วย** เรขาคณิตวิเคราะห์	**เวลา** 3 **คาบ**

เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์

สาระการเรียนรู้

3.1 ระยะทางระหว่างจุด 2 จุด

3.2 จุดกึ่งกลางระหว่างจุด 2 จุด

3.3 ความชันของเส้นตรง

สาระสำคัญ

ระบบพิกัดฉาก ประกอบไปด้วยเส้นจำนวน 2 เส้นที่ตั้งฉากบนระนาบเดียวกัน ระยะทางระหว่างจุด 2 จุด จุดกึ่งกลางระหว่างจุด 2 จุด ความชันของเส้นตรง

มาตรฐานการเรียนรู้

1. อธิบายเกี่ยวกับระบบพิกัดฉากได้
2. คำนวณหาระยะทางระหว่างจุด 2 จุดได้
3. คำนวณหาจุดกึ่งกลางระหว่างจุด 2จุดได้
4. คำนวณหาความชันของเส้นตรงได้

กระบวนการเรียนรู้

1. ขั้นนำ

ทบทวนการแทนค่าตัวแปรของสมการ

2. ขั้นการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

1. ผู้สอนอธิบายการหาระยะทาง, จุดกึ่งกลาง, ความชันพร้อมตัวอย่างประกอบ
2. ผู้เรียนทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน
3. ผู้เรียนออกมาสาธิตหน้าชั้นเรียน

3. ขั้นสรุป

ผู้สอนและผู้เรียนช่วยกันสรุปการหาระยะทาง, จุดกึ่งกลาง, ความชัน

กระบวนการวัดประเมินผล

วิธีวัดผล

1. สังเกตจาก การซักถาม จากการตรวจแบบฝึกหัด
2. ประเมินพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์

เครื่องมือวัดผล

1. แบบประเมินผลคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ โดยผู้สอนและผู้เรียน
2. แบบฝึกหัด

เกณฑ์การประเมิน

1. แบบประเมินคุณธรรม จริยธรรม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ ครั้งละ 10 คะแนน โดยตั้งเกณฑ์ได้ 6 คะแนนผ่าน
2. ตรวจแบบฝึกหัดเก็บคะแนน

แหล่งการเรียนรู้ / สื่ออุปกรณ์การเรียนการสอน

1. หนังสือรายวิชาคณิตศาสตร์ 2 (3000-1521)
2. แบบฝึกหัดท้ายบทเรียน
3. ห้องสมุดของวิทยาลัยเทคโนโลยีพณิชยการอยุธยา

บันทึกหลังการสอน

1. ผลการสอน

2. ปัญหา/อุปสรรค

3. ข้อเสนอแนะ/แนวทางแก้ไข

แผนเตรียมการสอน

สัปดาห์ที่ 11	**วิทยาลัยเทคโนโลยีพณิชยการอยุธยา**	**วันที่**
รหัส 3000-1525	**วิชา** คณิตศาสตร์ 2	**ท-ป-น** 3 – 0 – 3
หน่วยที่ 3	**ชื่อหน่วย** เรขาคณิตวิเคราะห์(ต่อ)	**เวลา** 3 **คาบ**

เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์

สาระการเรียนรู้

3.4 เส้นขนานและเส้นตั้งฉาก

3.5 สมการเส้นตรง

สาระสำคัญ

เส้นตรง 2 เส้นขนานกันเมื่อมีความชันเท่ากัน

เส้นตรง 2 เส้นตั้งฉากกันเมื่อความชันคูณกันเท่ากับ -1

มาตรฐานการเรียนรู้

1.สามารถคำนวณเส้นตรงขนานกันและเส้นตรงตั้งฉากกันได้

2.คำนวณหาสมการเส้นตรง พร้อมบอกรูปทั่วไปของสมการเส้นตรงได้

กระบวนการเรียนรู้

1. ขั้นนำ

ทบทวนการหาสมการ รูปทั่วไปของสมการ $Ax + By + c = 0$

2. ขั้นการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

1. ผู้สอนอธิบายความชันของเส้นตรง 2 เส้น $L_1 // L_2$ และ $L_1 \perp L_2$ พร้อมตัวอย่าง
2. ผู้เรียนทำแบบฝึกหัด
3. ผู้เรียนสาธิตหน้าชั้นเรียน

3. ขั้นสรุป

ผู้สอนและผู้เรียนช่วยกันสรุปเส้นตรง 2เส้นขนานกันและตั้งฉากกัน

กระบวนการวัดประเมินผล

วิธีวัดผล

1. สังเกต จากการซักถามจากการตรวจแบบฝึกหัด
2. ประเมินพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยมและคุณลักษณะอันพึงประสงค์

เครื่องมือวัดผล

1. แบบประเมินคุณธรรม จริยธรรมค่านิยมและคุณลักษณะอันพึงประสงค์โดยผู้สอนและผู้เรียน
2. แบบฝึกหัด

เกณฑ์การประเมิน

1. แบบประเมินคุณธรรม จริยธรรม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ ครั้งละ 10 คะแนน โดยตั้งเกณฑ์ได้ 6 คะแนนผ่าน
2. ตรวจแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

แหล่งการเรียนรู้ / สื่ออุปกรณ์การเรียนการสอน

1. หนังสือรายวิชาคณิตศาสตร์ (3000-1521)
2. แบบฝึกหัดท้ายบทเรียน
3. ห้องสมุดของวิทยาลัยเทคโนโลยีพณิชยการอยุธยา

บันทึกหลังการสอน

1. ผลการสอน

2. ปัญหา/อุปสรรค

3. ข้อเสนอแนะ/แนวทางแก้ไข

แผนเตรียมการสอน

สัปดาห์ที่ 12	**วิทยาลัยเทคโนโลยีพณิชยการอยุธยา**	**วันที่**
รหัส 3000-1521	**วิชา** คณิตศาสตร์ 2	**ท-ป-น** 3 – 0 – 3
หน่วยที่ 3	**ชื่อหน่วย** เรขาคณิตวิเคราะห์(ต่อ)	**เวลา** 3 **คาบ**

เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์

สาระการเรียนรู้

3.6 ระยะทางระหว่างจุดกับเส้นตรง

3.7ระยะทางระหว่างเส้นตรงกับเส้นตรง

สาระสำคัญ

ระยะทางระหว่างจุด $P(X_2 ,Y_1)$ และเส้นตรง $Ax + By + c = 0$

คือ $d = \frac{| \mathrm{Ax_1 + By_1 + c_1} |}{\sqrt{\mathrm{A^2+B^2}}}$

ระยะทางระหว่างเส้นตร$Ax_1 + By_1 + c_1 = 0, Ax_2 + By_2 + c_2 = 0$ง

คือ $d = \frac{| C_1 - C_2 |}{\sqrt{A^2+B^2}}$

มาตรฐานการเรียนรู้

1. คำนวณหาระยะทางระหว่างจุดกับเส้นตรงได้
2. คำนวณหาระยะทางระหว่างเส้นตรงกับเส้นตรงได้
3. นำความรู้เรื่องเส้นตรงไปประยุกต์ใช้ในงานวิชาชีพและชีวิตประจำวัน

กระบวนการเรียนรู้

1. ขั้นนำ

ทบทวนเกี่ยวกับกับรูปสมการ $Ax + By + c = 0$

2. ขั้นการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

1. ผู้สอนอธิบายตัวอย่างระยะทางระหว่างจุดกับเส้นตรง
2. ผู้สอนอธิบายตัวอย่างระยะทางระหว่างเส้นตรงกับเส้นตรง
3. ผู้เรียนทำแบบฝึกหัด

3. ขั้นสรุป

ผู้สอนและผู้เรียนช่วยกันสรุประหว่างจุด สมการเส้นตรง

กระบวนการวัดประเมินผล

วิธีวัดผล

1. สังเกตจากการซักถาม จากการตรวจแบบฝึกหัด
2. ประเมินพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยมและคุณลักษณะอันพึงประสงค์

เครื่องมือวัดผล

1. ประเมินพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยมและคุณลักษณะอันพึงประสงค์โดยผู้สอนและผู้เรียน
2. แบบฝึกหัด

เกณฑ์การประเมิน

1. แบบประเมินคุณธรรม จริยธรรม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ ครั้งละ 10 คะแนน โดยตั้งเกณฑ์ได้ 6 คะแนนผ่าน
2. ตรวจแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

แหล่งการเรียนรู้ / สื่ออุปกรณ์การเรียนการสอน

1. หนังสือรายวิชาคณิตศาสตร์ (3000-1521)
2. แบบฝึกหัดท้ายบทเรียน
3. ห้องสมุดของวิทยาลัยเทคโนโลยีพณิชยการอยุธยา

บันทึกหลังการสอน

1. ผลการสอน

2. ปัญหา/อุปสรรค

3. ข้อเสนอแนะ/แนวทางแก้ไข

แผนเตรียมการสอน

สัปดาห์ที่ 13	**วิทยาลัยเทคโนโลยีพณิชยการอยุธยา**	**วันที่**
รหัส 3000-1521	**วิชา** คณิตศาสตร์ 2	**ท-ป-น** 3 – 0 – 3
หน่วยที่ 3	**ชื่อหน่วย** เรขาคณิตวิเคราะห์(ต่อ)	**เวลา** 3 **คาบ**

เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์

สาระการเรียนรู้

3.8 วงกลม

สาระสำคัญ

วงกลม คือ เซตหรือทางเดินของจุดที่มีระยะห่างจากจุดตรึง(จุดคู่อันดับ) เป็นระยะที่คงที่(รัศมี) ทางเดินของจุดเรียกว่า เส้นรอบวง

มาตรฐานการเรียนรู้

1. บอกความหมายของวงกลมได้
2. คำนวณหาสมการของวงกลม เมื่อทราบรัศมีและจุดศูนย์กลางได้
3. คำนวณการัศมีและจุดศูนย์กลางของวงกลม เมื่อกำหนดสมการวงกลมให้ได้

กระบวนการเรียนรู้

1. ขั้นนำ

ทบทวนสมการวงกลมที่มีจุดยอดที่จุดกำเนิด

2. ขั้นการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

1. ผู้สอนอธิบายสมการวงกลมที่จุดศูนย์กลางที่ $(0,0)$ กับสมการวงกลมที่จุดศูนย์กลางที่ $(h.k)$ พร้อมทั้งยกตัวอย่างเปรียบเทียบ
2. ผู้เรียนทำแบบฝึกหัด
3. ผู้เรียนออกมาสาธิตหน้าชั้นเรียน

3. ขั้นสรุป

ผู้สอนและผู้เรียนช่วยกันสรุปสมการวงกลม

กระบวนการวัดประเมินผล

วิธีวัดผล

1. สังเกตจากการซักถาม จากการตรวจแบบฝึกหัด
2. ประเมินพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยมและคุณลักษณะอันพึงประสงค์

เครื่องมือวัดผล

1. ประเมินพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยมและคุณลักษณะอันพึงประสงค์โดยผู้สอนและผู้เรียน
2. แบบฝึกหัด

เกณฑ์การประเมิน

1. แบบประเมินคุณธรรม จริยธรรม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ ครั้งละ 10 คะแนน โดยตั้งเกณฑ์ได้ 6 คะแนนผ่าน
2. ตรวจแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

แหล่งการเรียนรู้ / สื่ออุปกรณ์การเรียนการสอน

1. หนังสือรายวิชาคณิตศาสตร์ (3000-1521)
2. แบบฝึกหัดท้ายบทเรียน
3. ห้องสมุดของวิทยาลัยเทคโนโลยีพณิชยการอยุธยา

บันทึกหลังการสอน

1. ผลการสอน

2. ปัญหา/อุปสรรค

3. ข้อเสนอแนะ/แนวทางแก้ไข

แผนเตรียมการสอน

สัปดาห์ที่ 14	**วิทยาลัยเทคโนโลยีพณิชยการอยุธยา**	**วันที่**
รหัส 3000-1521	**วิชา** คณิตศาสตร์ 2	**ท-ป-น** 3 – 0 – 3
หน่วยที่ 3	**ชื่อหน่วย** เรขาคณิตวิเคราะห์(ต่อ)	**เวลา** 3 **คาบ**

เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์

สาระการเรียนรู้

3.9 พาราโบลา

สาระสำคัญ

พาราโบลา คือ เซตหรือทางเดินของจุด ซึ่งแต่ละจุดจะมีระยะห่างจากจุดคงที่จุดหนึ่ง(จุดโฟกัส) และเส้นตั้งฉาก(เส้นไดเรกทริกซ์) อีกเส้นหนึ่งเป็นความยาวที่เท่ากัน

มาตรฐานการเรียนรู้

1. บอกความหมายของพาราโบลาได้
2. คำนวณหาสมการของพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด $(h.k)$ ได้

กระบวนการเรียนรู้

1. ขั้นนำ

ทบทวนสมการพาราโบลาที่มีจุดยอดที่จุดกำเนิดทั้ง 2 แกน (แกนx , แกนy)

2. ขั้นการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

1. ผู้สอนให้ผู้เรียนศึกษาจากหนังสือรายวิชาคณิตศาสตร์ (3000-1521)
2. ผู้สอนอธิบายเกี่ยวกับความรู้เรื่อง พาราโบลา อธิบายสูตร ตัวอย่างประกอบ
3. ผู้เรียนทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

3. ขั้นสรุป

ผู้สอนและผู้เรียนช่วยกันสรุปสมการพาราโบลาที่ จุด (h, k)

กระบวนการวัดประเมินผล

วิธีวัดผล

1. สังเกตจากการซักถาม จากการตรวจแบบฝึกหัด
2. ประเมินพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยมและคุณลักษณะอันพึงประสงค์

เครื่องมือวัดผล

1. ประเมินพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยมและคุณลักษณะอันพึงประสงค์โดยผู้สอนและผู้เรียน
2. แบบฝึกหัด

เกณฑ์การประเมิน

1. แบบประเมินคุณธรรม จริยธรรม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ ครั้งละ 10 คะแนน โดยตั้งเกณฑ์ได้ 6 คะแนนผ่าน
2. ตรวจแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

แหล่งการเรียนรู้ / สื่ออุปกรณ์การเรียนการสอน

1. หนังสือรายวิชาคณิตศาสตร์ (3000-1521)
2. แบบฝึกหัดท้ายบทเรียน
3. ห้องสมุดของวิทยาลัยเทคโนโลยีพณิชยการอยุธยา

บันทึกหลังการสอน

1. ผลการสอน

2. ปัญหา/อุปสรรค

3. ข้อเสนอแนะ/แนวทางแก้ไข

แผนเตรียมการสอน

สัปดาห์ที่ 15	**วิทยาลัยเทคโนโลยีพณิชยการอยุธยา**	**วันที่**
รหัส 3000-1521	**วิชา** คณิตศาสตร์ 2	**ท-ป-น** 3 – 0 – 3
หน่วยที่ 3	**ชื่อหน่วย** เรขาคณิตวิเคราะห์(ต่อ)	**เวลา** 3 **คาบ**

เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์

สาระการเรียนรู้

3.8 วงรี

สาระสำคัญ

วงรี คือ เซตหรือทางเดินของจุดที่มีผลบวกของระยะทางจากจุดบนวงรีไปยังจุดคงที่ 2 จุด เป็นค่าคงตัว จุด 2 จุด เรียกว่า จุดโฟกัส

มาตรฐานการเรียนรู้

1. บอกความหมายของวงรีได้
2. คำนวณหาสมการของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่ (h, k) ได้

กระบวนการเรียนรู้

1. ขั้นนำ

ทบทวนสมการวงรีแกนตามขวาง (แกนx) ที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด

2. ขั้นการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

1. ผู้สอนให้ผู้เรียนศึกษาจากหนังสือรายวิชาคณิตศาสตร์ (3000-1521)
2. ผู้สอนอธิบายเกี่ยวกับความรู้เรื่อง สมการวงรี พร้อมตัวอย่างประกอบ
3. ผู้เรียนทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

3. ขั้นสรุป

ผู้สอนและผู้เรียนช่วยกันสรุปสมการวงรี

กระบวนการวัดประเมินผล

วิธีวัดผล

1. สังเกตจากการซักถาม จากการตรวจแบบฝึกหัด
2. ประเมินพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยมและคุณลักษณะอันพึงประสงค์

เครื่องมือวัดผล

1. ประเมินพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยมและคุณลักษณะอันพึงประสงค์โดยผู้สอนและผู้เรียน
2. แบบฝึกหัด

เกณฑ์การประเมิน

1. แบบประเมินคุณธรรม จริยธรรม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ ครั้งละ 10 คะแนน โดยตั้งเกณฑ์ได้ 6 คะแนนผ่าน
2. ตรวจแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

แหล่งการเรียนรู้ / สื่ออุปกรณ์การเรียนการสอน

1. หนังสือรายวิชาคณิตศาสตร์ (3000-1521)
2. แบบฝึกหัดท้ายบทเรียน
3. ห้องสมุดของวิทยาลัยเทคโนโลยีพณิชยการอยุธยา

บันทึกหลังการสอน

1. ผลการสอน

2. ปัญหา/อุปสรรค

3. ข้อเสนอแนะ/แนวทางแก้ไข

แผนเตรียมการสอน

สัปดาห์ที่ 16	**วิทยาลัยเทคโนโลยีพณิชยการอยุธยา**	**วันที่**
รหัส 3000-1521	**วิชา** คณิตศาสตร์ 2	**ท-ป-น** 3 – 0 – 3
หน่วยที่ 3	**ชื่อหน่วย** เรขาคณิตวิเคราะห์ (ต่อ)	**เวลา** 3 **คาบ**

เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์

สาระการเรียนรู้

3.8 วงรี (ต่อ)

สาระสำคัญ

วงรี คือ เซตหรือทางเดินของจุดที่มีผลบวกของระยะทางจากจุดบนวงรีไปยังจุดคงที่ 2 จุด เป็นค่าคงตัว จุด 2 จุด เรียกว่า จุดโฟกัส

มาตรฐานการเรียนรู้

1. บอกความหมายของวงรีได้
2. คำนวณหาสมการของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่ (h, k) ได้

กระบวนการเรียนรู้

1. ขั้นนำ

ทบทวนสมการวงรีแกนตามขวาง (แกนy) ที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด

2. ขั้นการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

1. ผู้สอนให้ผู้เรียนศึกษาจากหนังสือรายวิชาคณิตศาสตร์ (3000-1521)
2. ผู้สอนอธิบายเกี่ยวกับความรู้เรื่อง สมการวงรี พร้อมตัวอย่างประกอบ
3. ผู้เรียนทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

3. ขั้นสรุป

ผู้สอนและผู้เรียนช่วยกันสรุปสมการวงรี

กระบวนการวัดประเมินผล

วิธีวัดผล

1. สังเกตจากการซักถาม จากการตรวจแบบฝึกหัด
2. ประเมินพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยมและคุณลักษณะอันพึงประสงค์

เครื่องมือวัดผล

1. ประเมินพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยมและคุณลักษณะอันพึงประสงค์โดยผู้สอนและผู้เรียน
2. แบบฝึกหัด

เกณฑ์การประเมิน

1. แบบประเมินคุณธรรม จริยธรรม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ ครั้งละ 10 คะแนน โดยตั้งเกณฑ์ได้ 6 คะแนนผ่าน
2. ตรวจแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

แหล่งการเรียนรู้ / สื่ออุปกรณ์การเรียนการสอน

1. หนังสือรายวิชาคณิตศาสตร์ (3000-1521)
2. แบบฝึกหัดท้ายบทเรียน
3. ห้องสมุดของวิทยาลัยเทคโนโลยีพณิชยการอยุธยา

บันทึกหลังการสอน

1. ผลการสอน

2. ปัญหา/อุปสรรค

3. ข้อเสนอแนะ/แนวทางแก้ไข

แผนเตรียมการสอน

สัปดาห์ที่ 17	**วิทยาลัยเทคโนโลยีพณิชยการอยุธยา**	**วันที่**
รหัส 3000-1525	**วิชา** คณิตศาสตร์ 2	**ท-ป-น** 3 – 0 – 3
หน่วยที่ 3	**ชื่อหน่วย** เรขาคณิตวิเคราะห์(ต่อ)	**เวลา** 3 **คาบ**

เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์

สาระการเรียนรู้

3.11 ไฮเพอร์โบลา

สาระสำคัญ

ไฮเพอร์โบลา คือ เซตหรือทางเดินของจุดที่มีผลต่างของระยะจากจุดบนไฮเพอร์โบลา ไปยังจุดคงที่ 2 จุด เป็นค่าคงตัวจุดคงที่ 2 จุด เรียกว่า จุดโฟกัส

มาตรฐานการเรียนรู้

1. บอกความหมายของไฮเพอร์โบลาได้
2. คำนวณหาสมการของไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางที่ (h, k) ได้

กระบวนการเรียนรู้

1. ขั้นนำ

ทบทวนไฮเปอร์โบลาที่จุดกำเนิด

2. ขั้นการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

1. ผู้สอนให้ผู้เรียนศึกษาจากหนังสือรายวิชาคณิตศาสตร์ (3000-1521)
2. ผู้สอนอธิบายสมการไฮเพอร์โบลาจุดศูนย์กลางที่ (h, k) พร้อมยกตัวอย่าง
3. ผู้เรียนทำแบบฝึกหัด

3. ขั้นสรุป

ผู้สอนและผู้เรียนช่วยกันสรุปไฮเพอร์โบลา

กระบวนการวัดประเมินผล

วิธีวัดผล

1. สังเกตจากการซักถาม จากการตรวจแบบฝึกหัด
2. ประเมินพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยมและคุณลักษณะอันพึงประสงค์

เครื่องมือวัดผล

1. ประเมินพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยมและคุณลักษณะอันพึงประสงค์โดยผู้สอนและผู้เรียน
2. แบบฝึกหัด

เกณฑ์การประเมิน

1. แบบประเมินคุณธรรม จริยธรรม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ ครั้งละ 10 คะแนน โดยตั้งเกณฑ์ได้ 6 คะแนนผ่าน
2. ตรวจแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

แหล่งการเรียนรู้ / สื่ออุปกรณ์การเรียนการสอน

1. หนังสือรายวิชาคณิตศาสตร์ (3000-1521)
2. แบบฝึกหัดท้ายบทเรียน
3. ห้องสมุดของวิทยาลัยเทคโนโลยีพณิชยการอยุธยา

บันทึกหลังการสอน

1. ผลการสอน

2. ปัญหา/อุปสรรค

3. ข้อเสนอแนะ/แนวทางแก

ตารางวิเคราะห์การประเมินผลตามสภาพจริงหน่วยที่ 1

ลำดับ	จุดประสงค์การเรียนรู้	เครื่องมือวัด	จำนวนข้อ	คะแนน	หมายเหตุ
1	บอกความหมายของฟังก์ชันเอ็กซ์โปเนนเชียลได้	ข้อสอบอัตนัย	1	10	จุดประสงค์การเรียนรู้ที่ไม่ผ่าน ครูผู้สอนสารารถสอนซ่อมเสริมได้
2	บอกความหมายของฟังก์ชันลอการิทึมได้	ข้อสอบอัตนัย	1	10	
3	คำนวณหาค่าของฟังก์ชันเอ็กซ์โปเนนเชียลได้	ข้อสอบอัตนัย	1	10	
4	คำนวณหาค่าของฟังก์ชันลอการิทึมฐานต่างๆได้	ข้อสอบอัตนัย	1	10	
5	คำนวณหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมต่างๆได้	ข้อสอบอัตนัย	1	10	
6	บอกรูปแบบของฟังก์ชันตรรกยะได้	ข้อสอบอัตนัย	1	10	
7	สามารถแยกฟังก์ชันตรรกยะเป็นเศษส่วนย่อยได้	ข้อสอบอัตนัย	1	10	
8	คำนวณการกระจายทวินามโดยใช้ทฤษฎีบททวินามได้	ข้อสอบอัตนัย	1	10	
9	คำนวณการกระจายทวินามโดยใช้ทฤษฎีปาสกาสได้	ข้อสอบอัตนัย	1	10	
10	คุณธรรม จริยธรรม คุณลักษณะอันพึงประสงค์	แบบประเมิน		10	
			รวม	100	

การประเมินผล

ด้าน พุทธิพิสัย 30 **คะแนน**

จุดประสงค์	**เครื่องมือวัด**	**คะแนน**	**เกณฑ์ประเมิน**	**หมายเหตุ**
1. บอกความหมายของฟังก์ชันเอ็กซ์โปเนนเชียลได้	ข้อสอบอัตนัย	10	ไม่ต่ำกว่า 6 คะแนน	ถ้าคะแนนไม่ผ่านเกณฑ์มาตรฐานสามารถสอบซ่อมเสริมได้
2. บอกความหมายของฟังก์ชันลอการิทึมได้	ข้อสอบอัตนัย	10	ไม่ต่ำกว่า 6 คะแนน	
6. บอกรูปแบบของฟังก์ชันตรรกยะได้	ข้อสอบอัตนัย	10	ไม่ต่ำกว่า 6 คะแนน	

ข้อสอบ(จุดประสงค์ที่ 1, 2, 6)

1. จงบอกความหมายของฟังก์ชันเอ็กซ์โปเนนเชียล

ฟังก์ชันเอ็กซ์โปเนนเชียล คือ ฟังก์ชัน f ที่กำหนดให้

$f = \{(x, y)\epsilon RxR/\ \ y = a^x, a > 0$ และ $\mathrm{a} \neq 1\}$

เช่น 1. $f = \{(x, y)\epsilon RxR/\ \ y = 2^x\}$

2. $f = \{(x, y)\epsilon RxR/\ \ y = 3^x\}$

3. $f = \{(x, y)\epsilon RxR/\ \ y = \left(\frac{1}{3}\right)^x\}$

2. จงบอกความหมายของฟังก์ชันลอการิทึม

ฟังก์ชันลอการิทึม เป็นอินเวอร์สฟังก์ชันเอ็กโปเนนเชียล

$f = \{(x, y)\epsilon RxR/\ \ y = \log_a x\,, a > 0$ และ $a \neq 1\}$

เช่น 1. $\log_3 9 = 2$

2. $\log_4 1 = 0$

3. $\log_{25} 5 = \frac{1}{2}$

เกณฑ์การวัด (1, 2) ถ้านักศึกษาตอบ 1 ข้อได้ 4 คะแนน

ถ้านักศึกษาตอบ 2 ข้อได้ 7 คะแนน

ถ้านักศึกษาตอบ 3 ข้อได้ 10 คะแนน

ถ้านักศึกษาไม่ตอบ ไม่ได้ คะแนน

6. จงอธิบายฟังก์ชันตรรกยะเป็นอย่างไร

ฟังก์ชันตรรกยะมี 2 ชนิด

1. ฟังก์ชันตรรกยะเป็นเศษส่วนแท้ หมายถึง ฟังก์ชันตรรกยะในรูป $\frac{p(x)}{\mathrm{q(x)}}$ โดยมีกำลังของ $p(x)$น้อยกว่ากำลังของของ $q(x)$ เช่น $\frac{3x-5}{x^2-3x-4}$

2. ฟังก์ชันตรรกยะที่ไม่เป็นเศษส่วนแท้หมายถึง ฟังก์ชันตรรกยะในรูปโดยมีกำลังของ $p(x)$ มากกว่าหรือเท่ากับกำลังของ $q(x)$ เช่น $\frac{x^3-x^2+x-1}{2x+3}$

เกณฑ์การวัด ถ้านักศึกษาตอบ 1 ข้อได้ 5 คะแนน

ถ้านักศึกษาตอบ 2 ข้อได้ 10 คะแนน

ถ้านักศึกษาไม่ตอบ ไม่ได้ คะแนน

การประเมินผล

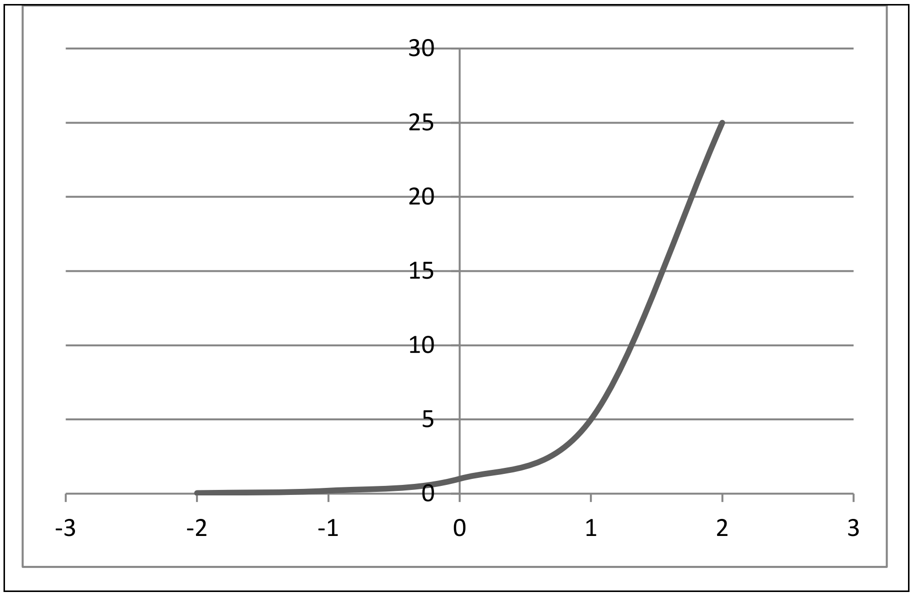
ด้าน ทักษะพิสัย 60 **คะแนน**

<table>
<tr><th>จุดประสงค์</th><th>เครื่องมือวัด</th><th>คะแนน</th><th>เกณฑ์ประเมิน</th><th>หมายเหตุ</th></tr>
<tr><td>3. คำนวณหาค่าของ ฟังก์ชันเอ็กซ์โปเนนเชียลได้</td><td>ข้อสอบอัตนัย</td><td>10</td><td>ไม่ต่ำกว่า 6 คะแนน</td><td rowspan="3">ถ้าคะแนนไม่ผ่าน เกณฑ์มาตรฐาน สามารถสอบซ่อมเสริมได้</td></tr>
<tr><td>4. คำนวณหาค่าของฟังก์ชัน ลอการิทึมฐานต่างๆได้</td><td>ข้อสอบอัตนัย</td><td>10</td><td>ไม่ต่ำกว่า 6 คะแนน</td></tr>
<tr><td>5. คำนวณหาค่าของฟังก์ชัน ตรีโกณมิติของมุมต่างๆได้</td><td>ข้อสอบอัตนัย</td><td>10</td><td>ไม่ต่ำกว่า 6 คะแนน</td></tr>
<tr><td>7. สามารถแยกฟังก์ชันตรรกยะเป็นเศษส่วนย่อยได้</td><td>ข้อสอบอัตนัย</td><td>10</td><td>ไม่ต่ำกว่า 6 คะแนน</td><td></td></tr>
<tr><td>8. คำนวณการกระจายทวินาม โดยใช้ทฤษฎีบททวินามได้</td><td>ข้อสอบอัตนัย</td><td>10</td><td>ไม่ต่ำกว่า 6 คะแนน</td><td></td></tr>
<tr><td>9. คำนวณการกระจายทวินาม โดยใช้ทฤษฎีปาสกาสได้</td><td>ข้อสอบอัตนัย</td><td>10</td><td>ไม่ต่ำกว่า 6 คะแนน</td><td></td></tr>
</table>

ข้อสอบ(จุดประสงค์ที่ 3, 4, 5, 7, 8, 9)

กำหนดให้ $y = 5^x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลด

x	$y = 5^x$
-2	$5^{-2} = 0.04$
-1	$5^{-1} = 0.2$
0	$5^0 = 1$
1	$5^1 = 5$
2	$5^2 = 25$



คู่อันดับ (-2, 0.04)(-1, 0.2)(0, 1)(1, 5)(2, 25) เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

จงหาค่า $\log 240$

วิธีทำ
$$\begin{aligned}
\log 240 &= \log 24 \times 10 \\
&= \log(2^3 \times 3x \times 10) \\
&= \log 2^3 + \log 3 + \log 10 \\
&= 3\log 2 + \log 3 + \log 10 \\
&= 3(0.3010) + 0.4771 + 1 \\
&= 0.9030 + 0.4771 + 1 \\
&= 2.3801
\end{aligned}$$

จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้

1. $\sin 300°$
2. $\cos 240°$

1. $\sin 300°$

มุม $300°$ อยู่ในจตุภาคที่ 4 จะได้ $\sin 300°$ เป็นลบ

จาก $\sin(360° - \theta) = -\sin\theta$

$$\sin(360° - 60) = -\sin 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

2. $\cos 240°$

มุม $240°$ อยู่ในจตุภาคที่ 3 จะได้ $\sin 240°$ เป็นลบ

จาก $\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$

$$\cos(180° - 60) = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$$

จงแยกฟังก์ชัน $\frac{5x-11}{2x^2+x-6}$ เป็นเศษส่วนย่อย

วิธีทำ
$$\frac{5x-11}{2x^2+x-6}=\frac{A}{(2x-3)}+\frac{B}{(x+2)}$$
$$=\frac{A(x+2)+B(2x-3)}{(2x-3)(x+2)}$$
$$\frac{5x-11}{2x^2+x-6}=\frac{Ax+2A+2Bx-3B}{(2x-3)(x+2)}$$
$$A+2B=5 \qquad (1)$$
$$2A+3B=-11 \qquad (2)$$
(2)x2, $$2A+4B=10 \qquad (3)$$
(2)-(3), $$-7B=-21$$
$$B=\frac{-21}{-7}=3$$
แทนค่า B = 3 ใน (1)
$$A+2(3)=5$$
$$A+6=5$$
$$A=5-6=-1$$
$$\frac{5x-11}{2x^2+x-6}=-\frac{1}{(2x-3)}+\frac{3}{(x+2)}$$
$$=\frac{3}{(x+2)}-\frac{1}{(2x-3)}$$

จงกระจาย$(x^2+2)^4$ โดยใช้ทฤษฎีบททวินาม

วิธีทำ $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)}$

$\binom{4}{0} = \frac{4!}{0!(4-0)} = 1$

$\binom{4}{1} = \frac{4!}{1!(4-1)} = 4$

$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)} = 6$

$\binom{4}{3} = \frac{4!}{3!(4-3)} = 4$

$\binom{4}{4} = \frac{4!}{4!(4-4)} = 1$

$$(x^2+2)^4 = \binom{4}{0}(\mathrm{x}^2)^4 2^0 + \binom{4}{1}(\mathrm{x}^2)^3 2^1 + \binom{4}{2}(\mathrm{x}^2)^2 2^2 + \binom{4}{3}(\mathrm{x}^2)^1 2^3 + \binom{4}{4}(\mathrm{x}^2)^0 2^4$$

$$= 1x^8(1) + 4x^6(2) + 6x^4(6) + 4x^2(8) + 1(1)16$$

$$= x^8 + 8x^6 + 24x^4 + 32x^2 + 16$$

จงกระจาย $(x+2y)^4$ โดยใช้สามเหลี่ยมปาสกาส

วิธีทำ $(a+b)^4 = 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1$

$$(x+2y)^4 = 1x^4(2y)^0 + 4x^3(2y)^1 + 6x^2(2y)^2 + 4x(2y)^5 + 1x^0(2y)^4$$

$$= x^4 + 4x^3(2y) + 6x^2(4y^2) + 4x(6y^3) + (16y^4)$$

$$= x^4 + 8x^3y + 24x^2y^2 + 24xy^3 + 16y^4$$

เกณฑ์การวัด ถ้านักศึกษาตอบแนวทางข้างต้นให้คะแนน 10 คะแนน

ถ้านักศึกษาตอบถูกแต่ไม่ครบตามกำหนดให้คะแนน 5 คะแนน

ถ้านักศึกษาทำถูกต้องแต่ไม่เหมือน อยู่ในดุลพินิจของผู้สอน

ถ้านักศึกษาไม่ทำไม่ให้คะแนน

การประเมินผล

ด้าน จิตพิสัย 10 **คะแนน**

จุดประสงค์	**เครื่องมือวัด**	**คะแนน**	**เกณฑ์ประเมิน**	**หมายเหตุ**
10. คุณธรรม จริยธรรม คุณลักษณะอันพึงประสงค์	แบบประเมิน	10	ไม่ต่ำกว่า 6 คะแนน	ถ้าคะแนนไม่ผ่านเกณฑ์มาตรฐานสามารถสอบซ่อมเสริมได้

เกณฑ์การวัด ความมีมนุษย์สัมพันธ์ 2 คะแนน

- แสดงกริยาท่าทางสุภาพใช้ได้ 1 คะแนน ปรับปรุง 0
- ให้ความร่วมมือกับผู้อื่นได้ 1 คะแนน ปรับปรุง 0

มีวินัย 2 คะแนน

- การแต่งกายถูกระเบียบ ถูกต้อง 1 คะแนน ปรับปรุง 0
- การตรงต่อเวลา 1 คะแนน ปรับปรุง 0

ความรับผิดชอบ 2 คะแนน

- มีความพร้อมในการเรียน 1 คะแนน ปรับปรุง 0
- ปฏิบัติงานด้วยความตั้งใจ 1 คะแนน ปรับปรุง 0

ความเชื่อมั่น 2 คะแนน

- กล้าแสดงความคิดเห็น 1 คะแนน ปรับปรุง 0
- กล้าซักถามปัญหาข้อสงสัย 1 คะแนน ปรับปรุง 0

มีสัมมาคารวะ 2 คะแนน

- แสดงความเคารพครู-อาจารย์สม่ำเสมอ 2 คะแนน ปรับปรุง 0

แบบประเมิน ด้านจิตพิสัย (จุดประสงค์การเรียนรู้ ข้อที่ 10)

หัวข้อที่วัด / ผู้เรียน	หัวข้อที่วัด											
	ความมีมนุษย์สัมพันธ์		มีวินัย		รับผิดชอบ		ความเชื่อมั่น		มีสัมมาคารวะ		รวม	
	2		2		2		2		2		10	

ตารางวิเคราะห์การประเมินผลตามสภาพจริงหน่วยที่ 2

ลำดับ	จุดประสงค์การเรียนรู้	เครื่องมือวัด	จำนวนข้อ	คะแนน	หมายเหตุ
1	บอกความหมายของเมทริกซ์ได้	ข้อสอบอัตนัย	1	10	จุดประสงค์การเรียนรู้ที่ไม่ผ่าน ครูผู้สอนสารารถสอนซ่อมเสริมได้
2	บอกเงื่อนไขที่ทำให้เมทริกซ์เท่ากันได้	ข้อสอบอัตนัย	1	10	
3	อธิบายสมบัติการบวกของเมทริกซ์ได้	ข้อสอบอัตนัย	1	10	
4	อธิบายสมบัติการคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์ได้	ข้อสอบอัตนัย	1	10	
5	หาเมทริกซ์ผันสำหรับการคูณได้	ข้อสอบอัตนัย	1	10	
6	สามารถหาค่าดีเทอร์มิเนนท์โดยวิธีการกระจายโคแฟกเตอร์ได้	ข้อสอบอัตนัย	1	10	
7	คำนวณหาแอดจอยท์หรือส่วนผกผันของเมทริกซ์ได้	ข้อสอบอัตนัย	1	10	
8	คำนวณหาเมทริกซ์ผกผันสำหรับการคูณได้	ข้อสอบอัตนัย	1	10	
9	คำนวณการแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้กฎของคราเมอร์ได้	ข้อสอบอัตนัย	1	10	
10	คุณธรรม จริยธรรม คุณลักษณะอันพึงประสงค์	แบบประเมิน		10	
			รวม	100	

การประเมินผล

ด้าน พุทธิพิสัย   40 **คะแนน**

จุดประสงค์	เครื่องมือวัด	คะแนน	เกณฑ์ประเมิน	หมายเหตุ
1. บอกความหมายของเมทริกซ์ได้	ข้อสอบอัตนัย	10	ไม่ต่ำกว่า 6 คะแนน	ถ้าคะแนนไม่ผ่านเกณฑ์มาตรฐานสามารถสอบซ่อมเสริมได้
2. บอกเงื่อนไขที่ทำให้เมทริกซ์เท่ากันได้	ข้อสอบอัตนัย	10	ไม่ต่ำกว่า 6 คะแนน	
3. อธิบายสมบัติการบวกของเมทริกซ์ได้	ข้อสอบอัตนัย	10	ไม่ต่ำกว่า 6 คะแนน	
4. อธิบายสมบัติการคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์ได้	ข้อสอบอัตนัย	10	ไม่ต่ำกว่า 6 คะแนน	

ข้อสอบ(จุดประสงค์ที่ 1-4)

1. จงบอกความหมายของเมทริกซ์ พร้อมยกตัวอย่าง 3 ตัวอย่าง

เมทริกซ์ คื การเรียงจำนวนจริงเป็นแถวๆละเท่ากัน อยู่ภายในวง [ ] หรือ ( ) จำนวนจริงที่นำมาเรียงกันแต่ละจำนวน เรียกว่า สมาชิกของเมทริกซ์

เช่น $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ หรือ $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 0 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$ หรือ $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 0 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$

$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ หรือ $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

เกณฑ์การวัด ถ้านักศึกษาตอบ 1 ข้อได้ 4 คะแนน

ถ้านักศึกษาตอบ 2 ข้อได้ 7 คะแนน

ถ้านักศึกษาตอบ 3 ข้อได้ 10 คะแนน

ถ้านักศึกษาไม่ตอบ ไม่ได้ คะแนน

2. จงบอกเงื่อนไขที่ทำให้เมทริกซ์เท่ากันได้ พร้อมยกตัวอย่าง

เมทริกซ์จะเท่ากัน ก็ต่อเมื่อ

1. สมาชิกมีขนาดเท่ากัน

2. สมาชิกที่อยู่ในตำแหน่งเดียวกันเท่ากัน

เช่น $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} A & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

3. จงอธิบายสมบัติการบวกของเมทริกซ์ พร้อมยกตัวอย่าง

1. เมทริกซ์จะบวกกันได้ จะต้องมีขนาดเท่ากัน

2. นำสมาชิกที่อยู่ในตำแหน่งเดียวกันมาบวกกัน

เช่น $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 10 \\ 7 & 4 & -5 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 4 \end{bmatrix}$ จงหา A+B

$$A + B = \begin{bmatrix} 3+1 & -2+0 & 10+3 \\ 7+1 & 4+5 & -5+4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -2 & 13 \\ 8 & 9 & -1 \end{bmatrix}$$

เกณฑ์การวัด ถ้านักศึกษาตอบ 1 ข้อได้ 5 คะแนน

ถ้านักศึกษาตอบ 2 ข้อได้ 10 คะแนน

ถ้านักศึกษาไม่ตอบ ไม่ได้ คะแนน

4.จงอธิบายสมบัติการคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์ พร้อมตัวอย่าง

การคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์ ก็ต่อเมื่อจำนวนแถวกับจำนวนหลักเท่ากัน คูณจนครบทุกหลัก เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \ B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2(2)+1(3) & 2(1)+1(4) & 2(1)+1(3) \\ 0(2)+3(3) & 0(1)+3(4) & 0(1)+3(3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4+3 & 2+4 & 2+3 \\ 0+9 & 0+12 & 0+9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 6 & 5 \\ 9 & 12 & 9 \end{bmatrix}$$

เกณฑ์การวัด ถ้านักศึกษาตอบแนวทางข้างต้นให้คะแนน 10 คะแนน

ถ้านักศึกษาตอบถูกแต่ไม่ครบตามกำหนดให้คะแนน 5 คะแนน

ถ้านักศึกษาทำถูกต้องแต่ไม่เหมือน อยู่ในดุลพินิจของผู้สอน

ถ้านักศึกษาไม่ทำไม่ให้คะแนน

การประเมินผล

ด้าน ทักษะพิสัย 50 **คะแนน**

จุดประสงค์	**เครื่องมือวัด**	**คะแนน**	**เกณฑ์ประเมิน**	**หมายเหตุ**
5. หาเมทริกซ์ผันสำหรับการคูณได้	ข้อสอบอัตนัย	10	ไม่ต่ำกว่า 6 คะแนน	ถ้าคะแนนไม่ผ่านเกณฑ์มาตรฐาน สามารถสอบผ่านเสริมได้
6. สามารถหาค่าดีเทอร์มิเนนท์โดยวิธีการกระจายโคแฟกเตอร์ได้	ข้อสอบอัตนัย	10	ไม่ต่ำกว่า 6 คะแนน	
7. คำนวณหาแอดจอยท์หรือส่วนผกผันของเมทริกซ์ได้	ข้อสอบอัตนัย	10	ไม่ต่ำกว่า 6 คะแนน	
8. คำนวณหาเมทริกซ์ผกผันสำหรับการคูณได้	ข้อสอบอัตนัย	10	ไม่ต่ำกว่า 6 คะแนน	
9. คำนวณการแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้กฎของคราเมอร์ได้	ข้อสอบอัตนัย	10	ไม่ต่ำกว่า 6 คะแนน	

ข้อสอบ(จุดประสงค์ 5-9)

5. จงหาเมทริกซ์ผกผันสำหรับการคูณให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -5 & 9 \end{bmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2(9)-(-5)4}\begin{bmatrix} 9 & -4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{38}\begin{bmatrix} 9 & -4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{9}{38} & \frac{-4}{38} \\ \frac{5}{38} & \frac{2}{38} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{38} & \frac{-2}{19} \\ \frac{5}{38} & \frac{1}{19} \end{bmatrix}$$

เกณฑ์การวัด ถ้านักศึกษาตอบแนวทางข้างต้นให้คะแนน 10 คะแนน

ถ้านักศึกษาตอบถูกแต่ไม่ครบตามกำหนดให้คะแนน 5 คะแนน

ถ้านักศึกษาทำถูกต้องแต่ไม่เหมือน อยู่ในดุลพินิจของผู้สอน

ถ้านักศึกษาไม่ทำไม่ให้คะแนน

6. จงหาค่าดีเทอร์มิแนนท์โดยการกระจายโคแฟกเตอร์

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

แถวที่ 1

$$detA = a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + a_{13}c_{13}$$

$$c_{ij} = (-1)^{i+j}m_{ij}$$

$$c_{11} = (-1)^{1+1}m_{11}$$

$$= -1^2 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1(2-12) = -10$$

$$c_{12} = (-1)^{1+2}m_{12}$$

$$= -1^3 \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1(4-8) = -10$$

$$\therefore detA = 1(-10) + 5(-12) + 0(c_{13})$$

$$= -10 - 60$$

$$= -70$$

เกณฑ์การวัด ถ้านักศึกษาตอบแนวทางข้างต้นให้คะแนน 10 คะแนน

ถ้านักศึกษาตอบถูกแต่ไม่ครบตามกำหนดให้คะแนน 5 คะแนน

ถ้านักศึกษาทำถูกต้องแต่ไม่เหมือน อยู่ในดุลพินิจของผู้สอน

ถ้านักศึกษาไม่ทำไม่ให้คะแนน

7. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ จงหา $adjA$

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij}$$

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij}$$

$$c_{11} = (-1)^{1+1} m_{11}$$

$$= -1^2 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 1(-2-0) = -2$$

$$c_{12} = (-1)^{1+2} m_{12}$$

$$= -1^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -1(2-0) = -2$$

$$c_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = -1^4(4-3) = 1$$

$$c_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -1^3(12-12) = 0$$

$$c_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -1^4(10+9) = 19$$

$$c_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = -1^5(20+18) = -38$$

$$c_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1^4(0+3) = 3$$

$$c_{32} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1^5(0-3) = 3$$

$$c_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1^6(-5-6) = -11$$

$$c_{ij} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 0 & 19 & -38 \\ 3 & 3 & -11 \end{bmatrix}$$

$$[c_{ij}]^+ = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ -2 & 19 & 3 \\ 1 & -38 & -11 \end{bmatrix}$$

$$adjA = [c_{ij}] = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ -2 & 19 & 3 \\ 1 & -38 & -11 \end{bmatrix}$$

เกณฑ์การวัด ถ้านักศึกษาตอบแนวทางข้างต้นให้คะแนน 10 คะแนน

ถ้านักศึกษาตอบถูกแต่ไม่ครบตามกำหนดให้คะแนน 5 คะแนน

ถ้านักศึกษาทำถูกต้องแต่ไม่เหมือน อยู่ในดุลพินิจของผู้สอน

ถ้านักศึกษาไม่ทำไม่ให้คะแนน

8. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ จงหา A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} \times adjA$$

$$adjA = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -3 & 4 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 5 & 6 \\ 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{matrix}$$

$$= -10 + 0 + 12 - 9 - 0 - 12$$

$$= -19$$

จากคำตอบข้อ 7 $adjA = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ -2 & 19 & 3 \\ 1 & -38 & -11 \end{bmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{-19} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ -2 & 19 & 3 \\ 1 & -38 & -11 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-2}{-19} & \frac{0}{-19} & \frac{3}{-19} \\ \frac{-2}{-19} & \frac{19}{-19} & \frac{3}{-19} \\ \frac{1}{-19} & \frac{-38}{-19} & \frac{-11}{-19} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{19} & 0 & -\frac{3}{19} \\ \frac{2}{19} & -9 & -\frac{3}{19} \\ \frac{1}{-19} & 2 & \frac{11}{19} \end{bmatrix}$$

เกณฑ์การวัด ถ้านักศึกษาตอบแนวทางข้างต้นให้คะแนน 10 คะแนน
ถ้านักศึกษาตอบถูกแต่ไม่ครบตามกำหนดให้คะแนน 5 คะแนน
ถ้านักศึกษาทำถูกต้องแต่ไม่เหมือน อยู่ในดุลพินิจของผู้สอน
ถ้านักศึกษาไม่ทำไม่ให้คะแนน

9.จงแก้ระบบสมการเชิงเส้น โดยใช้กฎของคราเมอร์

$$x + 2y + z = 2$$

$$2x - 3y - 22 = 0$$

$$-3x + y + 42 = 1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \end{array} \right| \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{array} = -12 + 12 + 12 + 2 - 9 + 2 - 16 = -21$$

$$\Delta x = \left| \begin{array}{ccc} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{array} \right| \begin{array}{cc} 2 & 2 \\ 0 & -3 \\ 1 & 1 \end{array} = -24 - 4 + 0 + 3 + 4 - 0 = -21$$

$$\Delta y = \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \end{array} \right| \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{array} = 0 + 12 + 2 - 0 + 2 - 16 = 0$$

$$\Delta z = \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{array} \right| \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{array} = -3 + 0 + 4 - 18 - 0 - 4 = -21$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-21}{-21} = 1$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{0}{-21} = 0$$

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{-21}{-21} = 1$$

เกณฑ์การวัด ถ้านักศึกษาตอบแนวทางข้างต้นให้คะแนน 10 คะแนน

ถ้านักศึกษาตอบถูกแต่ไม่ครบตามกำหนดให้คะแนน 5 คะแนน

ถ้านักศึกษาทำถูกต้องแต่ไม่เหมือน อยู่ในดุลพินิจของผู้สอน

ถ้านักศึกษาไม่ทำไม่ให้คะแนน

การประเมินผล

ด้าน จิตพิสัย 10 **คะแนน**

จุดประสงค์	เครื่องมือวัด	คะแนน	เกณฑ์ประเมิน	หมายเหตุ
10. คุณธรรม จริยธรรม คุณลักษณะอันพึงประสงค์	แบบประเมิน	10	ไม่ต่ำกว่า 6 คะแนน	ถ้าคะแนนไม่ผ่านเกณฑ์มาตรฐาน สามารถสอบผ่านเสริมได้

เกณฑ์การวัด ความมีมนุษย์สัมพันธ์ 2 คะแนน

- แสดงกริยาท่าทางสุภาพใช้ได้ 1 คะแนน ปรับปรุง 0

- ให้ความร่วมมือกับผู้อื่นได้ 1 คะแนน ปรับปรุง 0

มีวินัย 2 คะแนน

- การแต่งกายถูกระเบียบ ถูกต้อง 1 คะแนน ปรับปรุง 0
- การตรงต่อเวลา 1 คะแนน ปรับปรุง 0

ความรับผิดชอบ 2 คะแนน

- มีความพร้อมในการเรียน 1 คะแนน ปรับปรุง 0
- ปฏิบัติงานด้วยความตั้งใจ 1 คะแนน ปรับปรุง 0

ความเชื่อมั่น 2 คะแนน

- กล้าแสดงความคิดเห็น 1 คะแนน ปรับปรุง 0
- กล้าซักถามปัญหาข้อสงสัย 1 คะแนน ปรับปรุง 0

มีสัมมาคารวะ 2 คะแนน

- แสดงความเคารพครู-อาจารย์สม่ำเสมอ 2 คะแนน ปรับปรุง 0

แบบประเมิน ด้านจิตพิสัย (จุดประสงค์การเรียนรู้ ข้อที่ 10)

หัวข้อที่วัด ผู้เรียน	หัวข้อที่วัด											
	ความมีมนุษย์สัมพันธ์		มีวินัย		รับผิดชอบ		ความเชื่อมั่น		มีสัมาคารวะ		รวม	
	2		2		2		2		2		10	

ตารางวิเคราะห์การประเมินผลตามสภาพจริงหน่วยที่ 3

ลำดับ	จุดประสงค์การเรียนรู้	เครื่องมือวัด	จำนวนข้อ	คะแนน	หมายเหตุ
1	คำนวณหาระยะทางระหว่างจุด 2 จุดได้	ข้อสอบอัตนัย	1	10	จุดประสงค์การเรียนรู้ที่ไม่ผ่าน ครูผู้สอนสารารถสอนซ่อมเสริมได้
2	คำนวณหาจุดกึ่งกลางระหว่างจุด 2 จุดได้	ข้อสอบอัตนัย	1	10	
3	คำนวณหาความชันของเส้นตรงได้	ข้อสอบอัตนัย	1	10	
4	คำนวณหาสมหารเส้นตรงพร้อมทั้งบอกรูปทั่วไปขแงสมการเส้นตรงได้	ข้อสอบอัตนัย	1	10	
5	คำนวณหาระยะทางระหว่างจุดกับเส้นตรงได้	ข้อสอบอัตนัย	1	10	
6	บอกความหมายของวงกลม พาราโบลา วงรี ไฮเปอร์โบลา	ข้อสอบอัตนัย	1	10	
7	คำนวณหารัศมีและจุดศูนย์กลางของวงกลมเมื่อกำหนดสมการวงกลมได้	ข้อสอบอัตนัย	1	10	
8	คำนวณหาสมการพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด (h,k) ได้	ข้อสอบอัตนัย	1	10	
9	คำนวณหาสมการวงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด (h,k) ได้	ข้อสอบอัตนัย	1	10	
10	คุณธรรม จริยธรรม คุณลักษณะอันพึงประสงค์	แบบประเมิน		10	
			รวม	100	

การประเมินผล

ด้าน พุทธิพิสัย 10 **คะแนน**

จุดประสงค์	เครื่องมือวัด	คะแนน	เกณฑ์ประเมิน	หมายเหตุ
6. บอกความหมายของวงกลม พาราโบลา วงรี ไฮเพอร์โบลา	บรรยาย	10	ไม่ต่ำกว่า 6 คะแนน	ถ้าคะแนนไม่ผ่านเกณฑ์มาตรฐานสามารถสอบผ่านเสริมได้

ข้อสอบ(จุดประสงค์ที่ 6)

จงบอกความหมายของวงกลม พาราโบลา วงรี ไฮเปอร์โบลา

- วงกลม คือ เซตหรือทางเดินของจุดบนระนาบที่มีระยะห่างจากจุดตรึงหรือจุดหนึ่งที่เป็นระยะที่คงที่ (จุดศูนย์กลาง, รัศมี, เส้นรอบวง)

- พาราโบลา คือ เซตหรือทางเดินของจุดบนระนาบ ซึ่งแต่ละจุดจงมีระยะห่างจากจุดคงที่จุดหนึ่งและเส้นตรงคงที่อีกเส้นหนึ่ง เป็นความยาวที่เท่ากัน (จุดโฟกัส, เส้นไดเรกทริกซ์)

- วงรี คือ เซตหรือทางเดินของจุดบนระนาบ ซึ่งมีผลบวกของระยะทางจากจุดบนวงรีไปยังจุดคงที่ 2 จุด เป็นค่าคงตัว 2 จุด เรียกว่า จุดโฟกัส

- ไฮเพอร์โบลา คือ เซตหรือทางเดินของจุดที่มีผลต่างของระยะ จากจุดบนไฮเพอร์โบลาไปยังจุดคงที่ 2 จุด เป็นค่าคงตัว จุดคงที่ 2 จุด เรียกว่า จุดโฟกัส

เกณฑ์การวัด ถ้านักศึกษาตอบแนวทางข้างต้นให้คะแนน 10 คะแนน

ถ้านักศึกษาตอบถูกแต่ไม่ครบตามกำหนดให้คะแนน 5 คะแนน

ถ้านักศึกษาทำถูกต้องแต่ไม่เหมือน อยู่ในดุลพินิจของผู้สอน

ถ้านักศึกษาไม่ทำไม่ให้คะแนน

การประเมินผล

ด้าน ทักษะพิสัย 80 **คะแนน**

จุดประสงค์	เครื่องมือวัด	คะแนน	เกณฑ์ประเมิน	หมายเหตุ
1. คำนวณหาระยะทางระหว่างจุด 2 จุดได้	ข้อสอบอัตนัย	10	ไม่ต่ำกว่า 6 คะแนน	ถ้าคะแนนไม่ผ่านเกณฑ์มาตรฐานสามารถสอบซ่อมเสริมได้
2. คำนวณหาจุดกึ่งกลางระหว่างจุด 2 จุดได้	ข้อสอบอัตนัย	10	ไม่ต่ำกว่า 6 คะแนน	
3. คำนวณหาความชันของเส้นตรงได้	ข้อสอบอัตนัย	10	ไม่ต่ำกว่า 6 คะแนน	
4. คำนวณหาสมหารเส้นตรงพร้อมทั้งบอกรูปทั่วไปขแงสมการเส้นตรงได้	ข้อสอบอัตนัย	10	ไม่ต่ำกว่า 6 คะแนน	
5. คำนวณหาระยะทางระหว่างจุดกับเส้นตรงได้	ข้อสอบอัตนัย	10	ไม่ต่ำกว่า 6 คะแนน	
7. คำนวณหารัศมีและจุดศูนย์กลางของวงกลมเมื่อกำหนดสมการวงกลมได้	ข้อสอบอัตนัย	10	ไม่ต่ำกว่า 6 คะแนน	
8. คำนวณหาสมการพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด (h,k) ได้	ข้อสอบอัตนัย	10	ไม่ต่ำกว่า 6 คะแนน	
9. คำนวณหาสมการวงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด (h,k) ได้	ข้อสอบอัตนัย	10	ไม่ต่ำกว่า 6 คะแนน	

ข้อสอบ(จุดประสงค์ที่ 1-5, 7-9)

1. จงหาระยะทางระหว่าง A(-3, 2) และ B(5, 8)

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$AB = \sqrt{(5 - (-3))^2 + (8 - 2)^2}$$
$$= \sqrt{(5 + 3)^2 + (8 - 2)^2}$$
$$= \sqrt{8^2 + 6^2}$$
$$= \sqrt{64 + 36}$$
$$= \sqrt{100}$$
$$= 10$$ หน่วย

2. จงหาจุดกึ่งกลางระหว่าง A(-3, 2) และ B(5, 8)

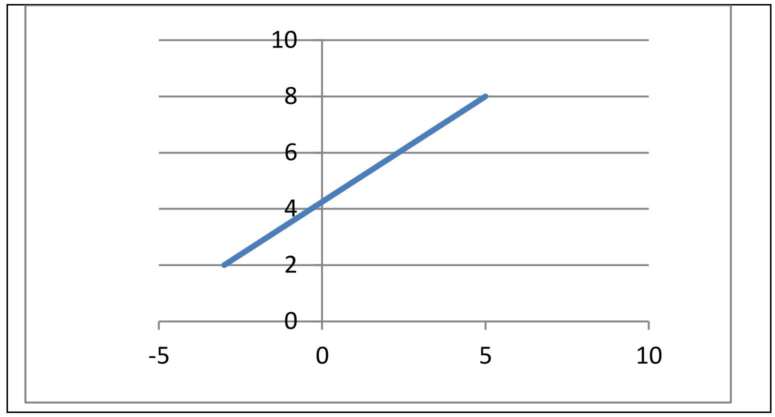
$$(\overline{A}, \overline{B}) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_1}{2}\right)$$
$$(\overline{A}, \overline{B}) = \left(\frac{-3 + 5}{2}, \frac{2 + 8}{2}\right)$$
$$= \left(\frac{2}{2}, \frac{10}{2}\right)$$
$$(\overline{A}, \overline{B}) = (1, 5)$$

จุดกึ่งกลาง คือ $(1, 5)$

3. จงหาความชันของเส้นตรงผ่านจุดระหว่าง A(-3, 2) และ B(5, 8)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
$$m = \frac{8 - 2}{5 - (-3)}$$
$$m = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

4. จงหาสมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด ระหว่าง A(-3, 2) และ B(5, 8) พร้อมวาดรูป



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{8-2}{5-(-3)}$$

$$m = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 2 = \frac{3}{2}(m - (-3))$$

$$4(y-2) = 3(x+3)$$

$$4y - 8 = 3x + 9$$

$$-3x + 4y - 8 - 9 = 0$$

$$-3x + 4y - 17 = 0$$

$$3x - 4y + 17 = 0 \;/\; Ax + By + C = 0$$

5. จงหาระยะทางจากจุด P(4, 3) ไปยังเส้นตรง 6x + 8Y+ 10 = 0

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$x_1 = 4, y_1 = 3$

$A = 6, B = -8, C = 10$

$$d = \frac{|6(4) + (-8)3 + 10|}{\sqrt{6^2 + (-8)^2}}$$

$$= \frac{|24 - 24 + 10|}{\sqrt{36 + 64}}$$

$$= \frac{|10|}{\sqrt{100}}$$

$$d = \frac{10}{10} = 1 \text{ หน่วย}$$

7.สมการวงกลม $\mathrm{x}^2 + y^2 - 4x + 10y = 20 = 0$ จงหาจุดศูนย์กลางและรัศมี

จุดกึ่งกลาง $\left(-\frac{D}{2}, \frac{E}{2}\right) = \left(-\left(\frac{4}{2}\right), \frac{10}{2}\right)$

$$= \left(\frac{4}{2}, \frac{10}{2}\right)$$

$$(h, k) = (2, -5)$$

รัศมี $\frac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2} = \frac{\sqrt{(-4)^2+(10)^2-4(-20)}}{2}$

$D = -4, E = 10, C = -20$ $\qquad = \frac{\sqrt{16+100+80}}{2}$

$$= \frac{\sqrt{196}}{2}$$

$$= \frac{14}{2}$$

$r = 7$ หน่วย

8. สมการพาราโบลา $y^2 + 6\mathrm{y} + 4\mathrm{x} - 12 = 0$ จงหาจุดยอด จุดโฟกัส สมการไดเรกทริกซ์ แกนของพาราโบลาและความยาวลาตัสเรกตัม

$$y^2 + 6\mathrm{y} + 4\mathrm{x} - 12 = 0$$
$$y^2 + 6\mathrm{y} + 3^2 = -4\mathrm{x} + 12 + 3^2$$
$$(y+3)^2 \qquad = -4x + 12 - 9$$
$$(y+3)^2 \qquad = -4x + 21$$
$$(y+3)^2 \qquad = -4\left(x + \frac{21}{4}\right)$$
$$(y-k)^2 \qquad = 4c + (x-h)$$
$$h = \frac{-21}{4} \qquad k = -3 \qquad c = -1$$
$$V(h,k) \qquad = V(\frac{-21}{4}, -3)$$
$$F(h+c,k) = F\left(\frac{-21}{4} + \left(\frac{-4}{4}\right), -3\right) = F\left(\frac{-25}{4}, -3\right)$$

สมการไดเรกทริกซ์ $x = h - c = -\frac{21}{4} - \left(-\frac{4}{4}\right) = -\frac{17}{4}$

แกนพาราโบลา $y = k = -3$

ความยาวลาตัสเรกตัม $|4\mathrm{c}| = |4(-1)| = |-4| = 4$ หน่วย

9. จงหาจุดศูนย์กลาง จุดโฟกัส จุดยอด ความยาวแกนหลัก ความยาวแกนรองของสมการวงรี

$$\frac{(x-4)^2}{25}+\frac{(y+1)^2}{9}=1$$

$$\frac{(x-4)^2}{5^2}+\frac{(y+1)^2}{3^2}=1 \ / \quad \frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y+k)^2}{b^2}=1$$

$$a=5, b=3$$

$$h=4, k=1$$

$$c^2=a^2-b^2=25-9=16=4^2$$

$$c=4$$

$$e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}$$

จุดศูนย์กลาง $(h,k)=(4,-1)$

จุดโฟกัส $(h\pm c,k)=(4\pm 4,-1)$

จุดยอด $(h\pm a,k)=(4\pm 5,-1)$

ความยาวแกนหลัก $2a=2(5)=10$ หน่วย

ความยาวแกนรอง $2b=2(3)=6$ หน่วย

เกณฑ์การวัด ถ้านักศึกษาตอบแนวทางข้างต้นให้คะแนน 10 คะแนน

ถ้านักศึกษาตอบถูกแต่ไม่ครบตามกำหนดให้คะแนน 5 คะแนน

ถ้านักศึกษาทำถูกต้องแต่ไม่เหมือน อยู่ในดุลพินิจของผู้สอน

ถ้านักศึกษาไม่ทำไม่ให้คะแนน

การประเมินผล

ด้าน จิตพิสัย 10 **คะแนน**

จุดประสงค์	เครื่องมือวัด	คะแนน	เกณฑ์ประเมิน	หมายเหตุ
10. คุณธรรม จริยธรรม คุณลักษณะอันพึงประสงค์	แบบประเมิน	10	ไม่ต่ำกว่า 6 คะแนน	ถ้าคะแนนไม่ผ่านเกณฑ์มาตรฐานสามารถสอบซ่อมเสริมได้

เกณฑ์การวัด ความมีมนุษย์สัมพันธ์ 2 คะแนน

- แสดงกริยาท่าทางสุภาพใช้ได้ 1 คะแนน ปรับปรุง 0
- ให้ความร่วมมือกับผู้อื่นได้ 1 คะแนน ปรับปรุง 0

มีวินัย 2 คะแนน

- การแต่งกายถูกระเบียบ ถูกต้อง 1 คะแนน ปรับปรุง 0
- การตรงต่อเวลา 1 คะแนน ปรับปรุง 0

ความรับผิดชอบ 2 คะแนน

- มีความพร้อมในการเรียน 1 คะแนน ปรับปรุง 0
- ปฏิบัติงานด้วยความตั้งใจ 1 คะแนน ปรับปรุง 0

ความเชื่อมั่น 2 คะแนน

- กล้าแสดงความคิดเห็น 1 คะแนน ปรับปรุง 0
- กล้าซักถามปัญหาข้อสงสัย 1 คะแนน ปรับปรุง 0

มีสัมมาคารวะ 2 คะแนน

- แสดงความเคารพครู-อาจารย์สม่ำเสมอ 2 คะแนน ปรับปรุง 0

แบบประเมิน ด้านจิตพิสัย (จุดประสงค์การเรียนรู้ ข้อที่ 10)

หัวข้อที่วัด / ผู้เรียน	หัวข้อที่วัด											
	ความมีมนุษย์สัมพันธ์		มีวินัย		รับผิดชอบ		ความเชื่อมั่น		มีสัมา คารวะ		รวม	
	2		2		2		2		2		10	

เกณฑ์การวัดผลและประเมินผลงานเป็นระดับคะแนน

หัวข้อ	รายการประเมิน	คะแนนที่ได้รับ		
		คะแนนเต็ม	ผู้สอน	ผู้เรียน
1	ตั้งใจ / สนใจการปฏิบัติงาน			
2	รู้จักวิธีการคำนวณได้ถูกต้อง			
3	ส่งงานตรงต่อเวลา มีชิ้นงานครบ			
	รวม			

ระดับคุณภาพของผู้เรียน

ระดับ 1 คะแนนระหว่าง 1-3 คะแนน

ระดับ 2 คะแนนระหว่าง 4-7 คะแนน

ระดับ 3 คะแนนระหว่าง 8-10 คะแนน

ลงชื่อ

( )

/ /

ใบงานที่ 1

1. จงเขียนกราฟของฟังชันเอ็กซ์โปเนนเชียล $y = 3^x$ และ $(\frac{1}{3})^x$ ลงบนระนาบแกน x,y เดียวกัน
2. จงหาค่าของ

   1) 3^{-2}

   2) $(-3)^5(9)^{-2}$

   3) $(2/3)^{-5}$

   4) $8(2)^{-3}$
3. จงคำนวณหาค่าโดยประมาณ

   1) e^2 =

   2) e^{-3} =

   3) $e^5 - 1$ =
4. จงหาค่า X จากสมการลอการิทึม

   1) $\log_2 x = 5$

   2) $\log_3 x = 0$

   3) $\log_x (6+x) = 2$

   4) 2) $\log x = \log 100$

   5) $\ln(2x+1) \quad \ln(x+6)$

ใบงานที่ 2

1.จงแสดงวิธีการหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ

1) sin 120°

2) cos $\frac{4}{3}\pi$ เรเดียน

2. กำหนด $\sin\theta = \frac{13}{40}$ จงหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติที่เหลือทั้งหมด

3. ช่างสำรวจจดบันทึกไว้ว่า จากจุด A มองไปยังจุด B ด้วยมุมก้ม 35° และจุด A มองไปยังจุด C ด้วยมุมก้ม 75° ระยะจาก A ไป B เท่ากับ 300 เมตร ระยะจาก A ไปC เท่ากับ400 เมตร จงหาระยะจาก B ไป C

ใบงานที่ 3

จงแยกฟังก์ชันตรรกยะที่เป็นเศษส่วนต่อไปนี้เป็นเศษส่วนย่อย

1. $\frac{8X-19}{(X+2)(X-5)}$

2. $\frac{-2X-9}{X^2-7X+12}$

3. $\frac{X^2+3X-1}{X^3-8}$

ใบงานที่ 4

1. จงหาค่าของ

    1) 5! + 3!

    2) 5 !- 3!

    3) $\binom{8}{3}$

    4) $\binom{10}{8}$

2. จงกระจายทวินามโดยใช้ทฤษฎีบททวินาม

    1. $(x+3)^5$

    2. . $(3x-2y)^4$

    3. . $(3x+y)^5$

3. จงหาพจน์ที่ 5 ของ $(x-3y^3)^{10}$

ใบงานที่ 5

จงแสดงวิธีทำ

กำหนดให้

A = $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ B = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

C = $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ $D = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 9 \\ 2 & 5 & -4 \\ 4 & 7 & 1 \end{bmatrix}$

จงหา

1. A+B

2. A+B -C

3. 2A

4. AD

5. BD

6. D^2

ใบงานที่ 6

จงแสดงวิธีทำ

1.ให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -5 & 9 \end{bmatrix}$ จงหาA^{-1} , A^{t}

2. ให้ **A**=$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ จงหาA^{-1} , A^{t}

ใบงานที่ 7

จงแสดงวิธีทำ

1. จงหาค่าดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริกซ์

1) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ =

2) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 4 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ =

2.จงหาค่า a

1) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & a \end{vmatrix} =$ -10

3. กำหนดให้ A = $\begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ จงหาค่า detA

ใบงานที่ 8

จงแสดงวิธีทำ

จงหา adj(A) $, A^{-1}$

1) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$

2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

ใบงานที่ 9

1. จงแก้สมการเชิงเส้น

$$2x - y - z = 1$$

$$x + 3y + z = 0$$

$$-x + y + 2z = 4$$

ใบงานที่ 10

จงแสดงวิธีทำ

จงหาระยะทางระหว่างจุด A และ B จุดกึ่งกลาง , ความชัน, สมการเส้นตรง

1) A(-3 ,2) และ B(5 , 8)

2) A (-3 , -9) และ B(-5 , 10)

3) A (4 , -3) และ B (-2, -5)

ใบงานที่ 11

จงแสดงวิธีทำ

1. จงหาสมการเส้นตรงที่ขนานกับเส้นตรง $2x - 3y + 5 = 0$ และผ่านจุด$(2,-3)$
2. จงหาสมการเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นตรง $x + 2y - 3 = 0$ และผ่านจุด$(3,-2)$

ใบงานที่ 12

จงแสดงวิธีทำ

1.จงหาระยะทางระหว่าง $3x - 4y - 9 = 0$ และเส้นตรง $3x - 4y + 11 = 0$

2.จงหาระยะทางระหว่าง จุด $(5, 6)$และเส้นตรง $6x - 8y - 2 = 0$

ใบงานที่ 13

จงแสดงวิธีทำ

1. จงหาสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด รัศมียาว 5 หน่วย
2. จงหาสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่(5 ,6) และเส้นผ่าศูนย์กลางยาว 16 หน่วย
3.สมการวงกลม $x^2+y^2-4x+10y-20=0$ จงหาจุดศูนย์กลาง,รัศมี

ใบงานที่ 14

จงหาสมการของพาราโบลา พร้อมทั้งวาดรูป

1. จุดโฟกัส คือจุด (0 ,5) จุดยอดคือ (0 ,0)
2. จุดโฟกัส คือจุด (-6 ,0) จุดยอดคือ (0 ,0)
3. จุดโฟกัส คือจุด (4 ,-3) จุดยอดคือ (4 ,1)

จงหาจุดยอด จุดโฟกัส สมการไดเรกทริกซ์ แกนของพาราโบลาและความยาวลาตัสเรกตัม

1. $x^2+2x+4y-6 = 0$
2. $y^2+6y+4x-12 = 0$

ใบงานที่ 15

จากสมการวงรี จงหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด จุดโฟกัส ความยาวแกนเอก ความยาวแกนรอง ความยาวลาตัสเรกตัม สมการไดเรกทริกซ์ พร้อมรูป

1. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

2. $\frac{(x+3)^2}{36} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$

3. จงหาสมการวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (4, 1) จุดโฟกัสอยู่ที่จุด (1 , 1) และจุด (7, 1)และมีความยาวคงตัวเท่ากับ 12 หน่วย

ใบงานที่ 16

จากสมการวงรี จงหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด จุดโฟกัส ความยาวแกนเอก ความยาวแกนรอง ความยาวลาตัสเรกตัม สมการไดเรกทริกซ์ พร้อมรูป

1. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

2. $\frac{(x-4)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{25} = 1$

3. **จงหาสมการวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (-1, 7) จุดโฟกัสอยู่ที่จุด (1 , 7) และมีค่า $e = 0.6$ จงหาจุดศูนย์กลาง และจุดโฟกัส**

ใบงานที่ 17

จากสมการไฮเพอร์โบลา จงหาจุดยอด จุดโฟกัส สมการไดเรกทริกซ์

1. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

2. $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$

แบบฝึกหัดที่ 1

1. จงแก้สมการ

   1) $2^x = 32$

   2) $3^{x+2} = 81$

   3) $2^{3-x} = 8^{x+2}$

3. จงคำนวณหาค่าโดยประมาณ

   1) $e^2 =$

   2) $e^3 =$

4. จงแก้สมการลอการิทึม

   1) $\log_3(x+8) = 2$

   2) $\log_5 x + \log_5 (x-4) = 1$

   3) $\log x + \log (x+8) = \log(x+3) + \log (x+4)$

แบบฝึกหัดที่ 2

1.จงแสดงวิธีการหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ

1) $\sin 135^\circ$

2) $\cos 210^\circ$

2. กำหนด รูปสามเหลี่ยม ABC มีด้าน BC ยาว 2 หน่วย ด้าน AC ยาว $1+\sqrt{3}$ หน่วย มีมุม ACB เท่ากับ 60 องศา จงหาความยาวด้าน AB

แบบฝึกหัดที่ 3

จงแยกฟังก์ชันตรรกยะที่เป็นเศษส่วนต่อไปนี้เป็นเศษส่วนย่อย

1. $\dfrac{2x^2+14\text{x}+8}{(x+1)(\text{x}+3)(\text{x}+5)}$

2. $\dfrac{-2X-9}{X^2-7X+12}$

แบบฝึกหัดที่ 4

1. จงหาค่าของ

   1) $2! + 3!$

   2) $3! - 2!$

   3) $\frac{3!}{2!}$

   4) $3!\ 2!$

2. จงกระจายทวินามโดยใช้ทฤษฎีบททวินาม

   1. $(2x+3)^5$

   2. . $(2x-4)^5$

ใบงานที่ 5

จงแสดงวิธีทำ

กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -8 \\ 4 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 9 \\ 2 & 5 & -4 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

จงหา

1. A + B

2. A - B

3. 2A

4. -2B

5. AC

6. AB

แบบฝึกหัดที่ 6

จงแสดงวิธีทำ

1.ให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -5 & 9 \end{bmatrix}$ จงหาA^{-1} , A^{t}

2. ให้ **A** = $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ จงหาA^{-1} , A^{t}

แบบฝึกหัดที่ 7

จงแสดงวิธีทำ

1. จงหาค่าดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริกซ์

1) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ =

2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ =

แบบฝึกหัดที่ 8

จงแสดงวิธีทำ

จงหา adj(A) $, A^{-1}$

1) $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

แบบฝึกหัดที่ 9

1. จงแก้สมการเชิงเส้น

$$
\begin{aligned}
x + 3y + z &= 0 \\
2x - y - z &= 1 \\
-x + y + 2z &= 4
\end{aligned}
$$

แบบฝึกหัดที่ 10

จงแสดงวิธีทำ

จงหาระยะทาง ระหว่างจุด A และจุด B จุดกึ่งกลาง , ความชัน

1) A(4 ,-5) และ B(-2 , -5)

2) A (-2 , 4) และ B(-3 , -3)

3) A (-3 , -9) และ B (-5, -10)

แบบฝึกหัดที่ 11

จงแสดงวิธีทำ

1. จงหาสมการเส้นตรงที่ขนานกับเส้นตรง $6x - 8y + 10 = 0$ และผ่านจุด$(4, 3)$
2. จงหาสมการเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นตรง $5x + y - 2 = 0$ และผ่านจุด$(-3, 6)$

แบบฝึกหัดที่ 12

จงแสดงวิธีทำ

จงหาระยะทางระหว่าง เส้นตรง และจุดที่กำหนดให้

1.จุด (1, 3) กับเส้นตรง $3x - 4y - 5 = 0$

2.จุด (-2,5) กับเส้นตรง $4x + 3y - 1 = 0$

แบบฝึกหัดที่ 13

จงแสดงวิธีทำ

1. จงหาสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (0,0)และ รัศมียาว 6 หน่วย
2. จงหาสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (3, -1) และรัศมียาว 2 หน่วย
3. จงหาสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (4, -1) และผ่านจุด(-1, 2)

แบบฝึกหัดที่ 14

จงหาสมการของพาราโบลา พร้อมทั้งวาดรูป

1. จุดโฟกัส คือจุด (-4, 0) จุดยอดคือ (0 ,0)
2. จุดโฟกัส คือจุด (0,-4) จุดยอดคือ (0 ,0)
3. จุดโฟกัส คือจุด (5 ,-3) จุดยอดคือ (2 ,-3)

จงหาจุดยอด จุดโฟกัส สมการไดเรกทริกซ์ แกนของพาราโบลาและความยาวลาตัสเรกตัม

1. $x^2 - 3x + 2y + 5 = 0$
2. $y^2 - 4y - 6x + 13 = 0$

แบบฝึกหัดที่ 15

จากสมการวงรี จงหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด จุดโฟกัส ความยาวแกนเอก ความยาวแกนรอง ความยาวลาตัสเรกตัม สมการไดเรกทริกซ์ พร้อมรูป

1. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

2. $\frac{(x+3)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1$

3. จากสมการวงรี $16x^2 + 25y^2 - 128x + 250y + 481 = 0$ จงหาจุดศูนย์กลาง จุดโฟกัส และจุดยอด

แบบฝึกหัดที่ 16

จากสมการวงรี จงหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด จุดโฟกัส ความยาวแกนเอก ความยาวแกนรอง ความยาวลาตัสเรกตัม สมการไดเรกทริกซ์ พร้อมรูป

1. $3x^2 + 4y^2 = 12$

2. $4x^2 + 9y^2 - 48x + 72y + 14 = 0$

แบบฝึกหัดที่ 17

จากสมการไฮเพอร์โบลา จงหาจุดยอด จุดโฟกัส สมการไดเรกทริกซ์

1. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$

2. $\frac{(y+1)^2}{9} - \frac{(x-4)^2}{27} = 1$

ใบความรู้ 1

ฟังก์ชันเอ็กซ์โปแนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม
(Exponential Function and Logarithm Functions)

ฟังก์ชันเอ็กซ์โปเนนเชียล (Exponential Functions)

ความหมายของฟังก์ชันเอ็กซ์โปเนนเชียล

ฟังก์ชันเอ็กซ์โปเนนเชียล (Exponential Functions) เป็นฟังก์ชันอดิสัยที่นำมาใช้มากในวิชาคณิตศาสตร์โดยตรง และมีการนำไปประยุกต์ใช้ในวิชาช่างอุตสาหกรรมอย่างกว้างขวางเช่นกัน ฟังก์ชันเอ็กซ์โปเนนเชียลเป็นฟังก์ชันที่มีนิยามดังนี้

> **นิยามที่ 1** ฟังก์ชันเอ็กซ์โปเนนเชียลเป็นฟังก์ชันที่อยู่ในรูป
> $f(x) = a^x$ เมื่อ $a > 0$, $a \neq 1$ และ x เป็นจำนวนจริงใดๆ

ตัวอย่างฟังก์ชันเอ็กซ์โปเนนเชียล เช่น $y = 5^x$, $y = 7^{-2x}$ เป็นต้น

สมบัติของเลขยกกำลัง

ถ้า a, b, m และ n เป็นจำนวนจริงใดๆ

ข้อที่ 1 $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ เช่น $2^3 \cdot 2^5 = 2^{3+5} = 2^8$

ข้อที่ 2 $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ เมื่อ $a \neq 0$, เช่น $\dfrac{5^5}{5^3} = 5^{5-3} = 5^2$

ข้อที่ 3 $(a^m)^n = a^{mn}$ เช่น $(8^2)^6 = 8^{2\times6} = 8^{12}$

ข้อที่ 4 $(ab)^m = a^m b^m$ เช่น $(4\times5)^7 = (4^7)\cdot(5^7)$

ข้อที่ 5 $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$ เมื่อ $b \neq 0$ เช่น $\left(\dfrac{3}{4}\right)^2 = \dfrac{3^2}{4^2}$

ข้อที่ 6 $a^0 = 1$ เมื่อ $a \neq 0$ เช่น $(56.5)^0 = 1$

ข้อที่ 7 $a^1 = a$ เช่น $6^1 = 6$

ข้อที่ 8 $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ เมื่อ $a \neq 0$ เช่น $9^{-6} = \frac{1}{9^6}$

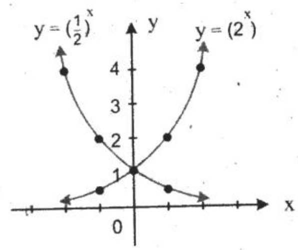
ข้อที่ 9 $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ เมื่อ $a > 0$, $n \neq 0$ เช่น $2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^3}$

ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล มีลักษณะพิเศษที่จะมีการเพิ่มขึ้นหรือลดลงอย่างรวดเร็วใน ปริมาณที่แตกต่างกันมาก

ตัวอย่างที่ จงเขียนกราฟ $y = 2^x$ และ $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ลงบนระนาบแกน x, y เดียวกัน

วิธีทำ กำหนดค่า x และหาค่า y ของแต่ละฟังก์ชัน แล้วจึงนำคู่อันดับ (x, y) ของแต่ละฟังก์ชัน ไปเขียนกราฟได้ดังนี้

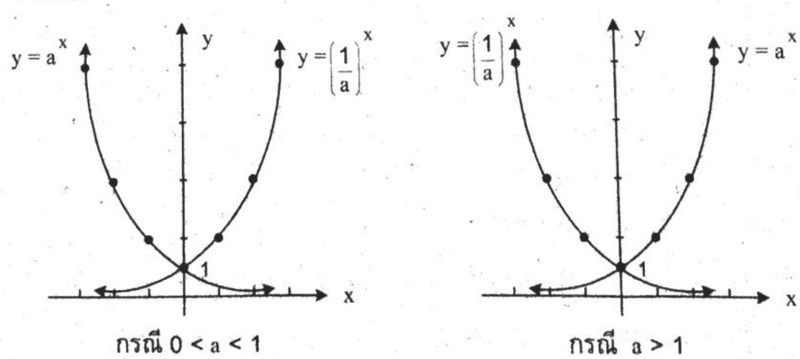
x	2^x
-2	0.25
-1	0.5
0	1
1	2
2	4



x	$\left(\frac{1}{2}\right)^x$
-2	4
-1	2
0	1
1	0.5
2	0.25

จากตัวอย่างจะได้ว่า กราฟของ $y = 2^x$ สมมาตรกับกราฟของ $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

ข้อสังเกต กราฟของ $y = a^x$ และ $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ จะสมมาตรกัน เมื่อเทียบกับแกน y



ฟังก์ชันลอการิทึม (Logarithm Functions)

ความหมายของฟังก์ชันลอการิทึม

ฟังก์ชันที่ถูกนำมาใช้มากอีกฟังก์ชันหนึ่ง ก็คือ ฟังก์ชันลอการิทึม (Logarithm Functions) เป็นฟังก์ชันอดิสัยอีกชนิดหนึ่ง และเป็นฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันเอ็กซ์โปเนนเชียล

นิยามที่ 2 ฟังก์ชันลอการิทึม เป็นฟังก์ชันที่อยู่ในรูป

$$f(x) = \log_a x$$

เมื่อ $a > 0$ และ $a \neq 1$

เราอ่าน $\log_a x$ ว่า ลอการิทึมเอ็กซ์ฐานเอ หรืออ่านสั้นๆ ว่า ล็อกเอ็กซ์ฐานเอ ฟังก์ชันลอการิทึมมีความสัมพันธ์กับฟังก์ชันเอ็กซ์โปเนนเชียล ดังนี้

ถ้า $y = \log_a x$ แล้ว $x = a^y$

สมบัติของลอการิทึม

สำหรับจำนวนจริงบวก M, N และ a โดยที่ $a > 0$, $a \neq 1$ และ n เป็นจำนวนจริงใดๆ

1.	$\log_a 1$	=	0
2.	$\log_a a$	=	1
3.	$\log_a M \cdot N$	=	$\log_a M + \log_a N$
4.	$\log_a \frac{M}{N}$	=	$\log_a M - \log_a N$
5.	$\log_a M^n$	=	$n \log_a M$
6.	$\log_a M$	=	$\frac{\log_b M}{\log_b a}$
7.	a^x	=	$10^{x \log a}$
8.	$a^{\log_a x}$	=	x

ตัวอย่างที่ จงหาค่า x จาก

1. $\log_3 x = 2$
2. $\log_{25} x = \frac{1}{2}$
3. $\log_x 81 = 4$

วิธีทำ

1. จาก $\log_3 x = 2$

$x = 3^2 = 9$

นั่นคือ $x = 9$

2. จาก $\log_{25} x = \frac{1}{2}$

$x = 25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5$

นั่นคือ $x = 5$

3. จาก $\log_x 81 = 4$

$81 = x^4$

$3^4 = x^4$

นั่นคือ $x = 3$

ใบความรู้ 2

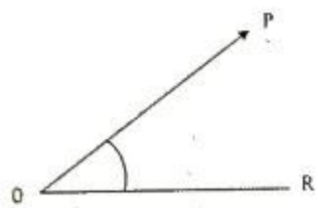
ฟังก์ชันตรีโกณมิติ (Trigonometric Functions)

ฟังก์ชันตรีโกณมิติ เป็นฟังก์ชันอดิศัยชนิดหนึ่ง และมีการนำมาใช้อย่างกว้างขวางในงานช่างทุกสาขาวิชา

ฟังก์ชันตรีโกณมิติเป็นฟังก์ชันที่มีตัวแปรอิสระเป็นมุม ดังนั้น สิ่งแรกที่จะต้องศึกษา คือ มุมและการวัดมุม

มุมและการวัดมุม

มุมเกิดจากการหมุนรังสี ออกจากด้านเริ่มต้น และเรียกจุดที่รังสีกับด้านเริ่มต้นพบกันว่า "จุดยอดมุม"



จากรูปที่ 2.1 OP เป็นรังสีที่หมุนออกจากด้านเริ่มต้น OR เรียกจุด O ว่าจุดยอดมุม

สัญลักษณ์ของมุมที่ใช้ "^" เช่น มุม POR เขียนแทนด้วย $P\hat{O}R$

มุมมีค่าเป็นได้ทั้งบวกและลบ ขึ้นอยู่กับการหมุนรังสี

- ถ้าหมุนรังสี OA จากด้านเริ่มต้น OX ไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา มุมที่ได้จะมีเครื่องหมายเป็นบวก
- ถ้าหมุนรังสี OA จากด้านเริ่มต้น OX ไปในทิศทางตามเข็มนาฬิกา มุมที่ได้จะมีเครื่องหมายเป็นลบ

การวัดขนาดของมุมที่ใช้กับฟังก์ชันตรีโกณมิติมี 2 ระบบ คือ องศา และเรเดียน

➲ ความสัมพันธ์ระหว่างมุมในหน่วยองศาและหน่วยเรเดียน

เนื่องจากวงกลม 1 หน่วย มีจุดศูนย์กลางที่รองรับด้วยส่วนโค้งยาว s เรเดียน

	360	องศา	=	2π	เรเดียน
และ	180	องศา	=	π	เรเดียน

ตัวอย่างที่ จงเปลี่ยน 270° ให้มีหน่วยเป็นเรเดียน

วิธีทำ เนื่องจาก $180^\circ = \pi$ เรเดียน

$$1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ} \text{ เรเดียน}$$

$$270^\circ = \frac{270^\circ \pi}{180^\circ} \text{ เรเดียน}$$

$$270^\circ = \frac{3\pi}{2} = \frac{3\times3.14}{2}$$

นั่นคือ $270^\circ = 4.71$ เรเดียน

ตัวอย่างที่ จงเปลี่ยนมุม $\frac{7\pi}{4}$ เรเดียน ให้มีหน่วยเป็นองศา

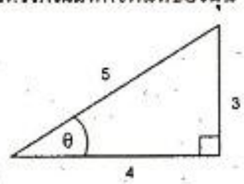
วิธีทำ เนื่องจาก $\pi = 180^\circ$

$$1 = \frac{180^\circ}{\pi}$$

$$\frac{7\pi}{4} = \frac{180^\circ}{\pi}\times\frac{7\pi}{4}$$

นั่นคือ $\frac{7\pi}{4} = 315^\circ$

ตัวอย่างที่ จงหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติทั้งหมดของมุม θ



วิธีทำ

$\sin\theta = \frac{3}{5} = 0.6$ $\quad\csc\theta = \frac{5}{3} = 1.\dot{6}$

$\cos\theta = \frac{4}{5} = 0.8$ $\quad\sec\theta = \frac{5}{4} = 1.25$

$\tan\theta = \frac{3}{4} = 0.75$ $\quad\cot\theta = \frac{4}{3} = 1.\dot{3}$

ใบความรู้ ๕

ฟังก์ชันตรรกยะ (Rational Function)

ฟังก์ชันตรรกยะ เป็นฟังก์ชันพีชคณิตชนิดหนึ่ง ซึ่งมีการนำมาใช้มากในวิชาช่างที่เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์ประยุกต์ และสำหรับในวิชาคณิตศาสตร์นี้ ก็มีการนำเรื่องฟังก์ชันตรรกยะมาช่วยแก้ปัญหา เช่น ในเรื่องการอินทิเกรตฟังก์ชันพีชคณิต ในบางครั้งไม่สามารถอินทิเกรตได้โดยตรง ต้องนำมาแยกเป็นเศษส่วนย่อยเสียก่อนจึงจะอินทิเกรตได้ ดังนั้นจึงมีความจำเป็นอย่างยิ่งที่จะต้องเรียนเรื่องฟังก์ชันตรรกยะ

ในการเรียนฟังก์ชันตรรกยะให้เข้าใจ ผู้เรียนควรมีความรู้เกี่ยวกับเรื่องฟังก์ชันพหุนามเสียก่อน ดังนี้

นิยามของฟังก์ชันพหุนาม

นิยามที่ 1 ฟังก์ชันพหุนามกำลัง n คือ ฟังก์ชันที่เขียนอยู่ในรูปแบบ

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$$

โดยที่ $a_n \neq 0$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก

ความหมายของฟังก์ชันตรรกยะ

นิยามที่ 2 ฟังก์ชันตรรกยะ (Rational Functions) หมายถึง ฟังก์ชันที่เขียนอยู่ในรูปแบบ

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

โดยที่ $p(x)$ และ $q(x)$ เป็นพหุนามของตัวแปร x

ตัวอย่างที่ จงแยก $R(x) = \dfrac{3x+5}{x^2+2x-3}$ เป็นเศษส่วนย่อย

วิธีทำ วิธีที่ 1 หาค่าคงตัว A, B, ... โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ มีขั้นตอนดังนี้

ขั้นที่ 1 แยกตัวประกอบของตัวส่วน $x^2 + 2x - 3$ ได้เป็น $(x + 3)(x - 1)$ ซึ่งเป็นตัวประกอบเชิงเส้น

ขั้นที่ 2 เขียน $\dfrac{3x+5}{x^2+2x-3}$ เป็นเศษส่วนย่อย

$$\frac{3x+5}{x^2+2x-3} = \frac{A}{x+3}+\frac{B}{x-1} \qquad ...(1)$$

ขั้นที่ 3 หาผลบวกของเศษส่วนย่อย

$$\frac{3x+5}{x^2+2x-3} = \frac{A(x-1)}{(x+3)(x-1)}+\frac{B(x+3)}{(x-1)(x+3)}$$

$$= \frac{A(x-1)+B(x+3)}{(x+3)(x-1)}$$

จะได้ $3x + 5 = A(x - 1) + B(x + 3)$

$= Ax - A + Bx + 3B$

$= (A + B)x + (-A + 3B)$

ขั้นที่ 4 หาค่าคงตัว A, B, ... โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ จะได้

เทียบสัมประสิทธิ์ของ x^1 ได้ $A + B = 3$ ...(2)

เทียบสัมประสิทธิ์ของ x^0 ได้ $-A + 3B = 5$ ...(3)

แก้ระบบสมการหาค่า A, B ดังนี้

(2) + (3), ได้ $4B = 8$

$$B = \frac{8}{4} = 2$$

แทน $B = 2$ ใน (2) ได้ $A + 2 = 3$, $A = 1$

ขั้นที่ 5 แทนค่าคงตัว A, B ในเศษส่วนย่อย

แทนค่า $A = 1$, $B = 2$ ใน (1)

นั่นคือ $$\frac{3x+5}{x^2+2x-3} = \frac{1}{x+3}+\frac{2}{x-1}$$

ใบความรู้ 4

ทฤษฎีบททวินาม (Binomial Theorem)

ทวินาม (Binomial) เป็นผลบวกหรือผลต่างของพจน์ 2 พจน์ เช่น (a + b) หรือ (a - b)

ในการกระจายหาผลลัพธ์ของ $(a+b)^n$ หรือ $(a-b)^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก ถ้า n เป็นตัวเลขน้อยๆ เราอาจกระจายโดยการคูณกัน แต่ถ้า n มีจำนวนมากๆ เช่น 10 การกระจายโดยวิธีคูณกันก็จะยุ่งยากและเสียเวลามาก การใช้ **ทฤษฎีบททวินาม** (Binomial Theorem) มาช่วยกระจายทวินาม จะทำให้ง่ายสะดวกและรวดเร็วขึ้น

ในการศึกษาเกี่ยวกับ ทฤษฎีบททวินาม จำเป็นต้องมีความรู้เกี่ยวกับ แฟกเทอเรียลและสัมประสิทธิ์ทวินาม เสียก่อน

แฟกทอเรียล (Factorial)

แฟกทอเรียลของ n เขียนแทนด้วย n! อ่านว่า เอ็นแฟกทอเรียล ซึ่งมีนิยามดังนี้

นิยามที่ 1 แฟกทอเรียล n เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก คือ

$$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots3\cdot2\cdot1$$

ถ้า $n = 0$ เรากำหนดให้ $\boxed{0! = 1}$ ซึ่งแสดงให้เห็นจริงดังนี้

จาก $n! = n(n-1)!$ จะได้ $(n-1)! = \frac{n!}{n}$

แทน $n = 1$ จะได้ $(1-1)! = \frac{1!}{1}$, นั่นคือ $0! = 1$

ตัวอย่างที่ จงหาค่าของ

1) $4!$ 2) $\dfrac{6!}{3!}$ 3) $\dfrac{11!}{8!\,3!}$

วิธีทำ

1) $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

2) $\dfrac{6!}{3!} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$

เพื่อความรวดเร็วข้อ (2) อาจใช้วิธีการดังนี้

$$\frac{6!}{3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$$

3) $\dfrac{11!}{8!\,3!} = \dfrac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8!}{8!(3 \cdot 2 \cdot 1)} = \dfrac{11 \cdot 10 \cdot 9}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 165$

หมายเหตุ ในการคำนวณ $n!$ ถ้าต้องการความรวดเร็ว อาจใช้เครื่องคำนวณช่วยก็ได้

ทฤษฎีบททวินาม

ถ้า n และ r เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $0 \le r \le n$ แล้ว

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$$

หรือ
$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{r}a^{n-r}b^r + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

ข้อสังเกต

1. พจน์ที่ $r+1$ กระจายได้เป็น

$$\binom{n}{r}a^{n-r}b^r$$

2. สัมประสิทธิ์ของพจน์ที่ $r+1$ คือ

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

ตัวอย่างที่ จงกระจาย $(a+b)^5$ โดยใช้ทฤษฎีบททวินาม

วิธีทำ จากทฤษฎีบททวินามจะได้

$$(a+b)^5 = \binom{5}{0}a^5 + \binom{5}{1}a^4b + \binom{5}{2}a^3b^2 + \binom{5}{3}a^2b^3 + \binom{5}{4}ab^4 + \binom{5}{5}b^5$$

หาสัมประสิทธิ์ทวินาม

$$\binom{5}{0} = \binom{5}{5} = \frac{5!}{0!\,5!} = 1$$

$$\binom{5}{1} = \binom{5}{4} = \frac{5!}{1!\,4!} = 5$$

$$\binom{5}{2} = \binom{5}{3} = \frac{5!}{2!\,3!} = 10$$

จะได้ $(a+b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$

นั่นคือ $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

ตัวอย่างที่ จงหาพจน์ที่ 8 ของ $(x+3)^{15}$

วิธีทำ ในการกระจายทวินามพจน์ที่ $r+1 = \binom{n}{r}x^{n-r}3^r$ ดังนั้น พจน์ที่ 8 = 7+1

ได้ $a = x$, $b = 3$, $r = 7$ และ $n = 15$

$$\text{พจน์ที่ } 8 = \text{พจน์ที่ } 7+1 = \binom{15}{7}x^{15-7}3^7$$

$$= \frac{15!}{7!(15-7)!}x^8 3^7$$

$$= 6435x^8 3^7$$

นั่นคือ พจน์ที่ 8 ของ $(x+3)^{15} = 6435x^8 3^7 = 14073345\,x^8$

ตัวอย่างที่ จงหาสัมประสิทธิ์ทวินามของพจน์ x^8y^2 ในการกระจาย $(2x+y)^{10}$

วิธีทำ พจน์ที่ต้องการหาสัมประสิทธิ์ คือ x^8y^2 ซึ่งเป็นพจน์ที่ 3 (กำลังของ $y + 1$ คือ อันดับของพจน์)

$$\text{พจน์ที่ 3 คือ } \binom{10}{2}(2x)^8y^2 = \frac{10!}{2!(10-2)!}(2^8x^8)y^2$$

$$= \frac{10!}{2!\,8!}(256x^8y^2)$$

$$= (45)(256)x^8y^2$$

$$= 11520x^8y^2$$

นั่นคือ สัมประสิทธิ์ของพจน์ x^8y^2 คือ 11520

ใบความรู้ 5

เมทริกซ์ (Matrix)

เมทริกซ์เป็นเรื่องที่สำคัญมากในการศึกษาคณิตศาสตร์ที่มีหลายมิติ ซึ่งคณิตศาสตร์ขั้นสูงมักจะเป็นคณิตศาสตร์ที่มีหลายมิติ นอกจากนั้น เมทริกซ์ ยังเป็นเครื่องมือที่สำคัญในการแก้ปัญหาทางช่างและชีวิตประจำวัน ดังนั้นจึงควรศึกษาเกี่ยวกับเมทริกซ์ในแง่มุมต่างๆ ให้ถ่องแท้เสียก่อน

ความหมายของเมทริกซ์

นิยามที่ 1 เมทริกซ์ คือ กลุ่มตัวเลขที่นำมาเรียงกันอยู่ในวงเล็บใหญ่ คือ [ ] หรือวงเล็บเล็ก คือ ( ) โดยเรียงกันในรูปแบบ

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} \quad \text{หรือ} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n}$$

โดยที่ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก

สัญลักษณ์ $m \times n$ อ่านว่า เอ็มบายเอ็น (m by n) เป็นสิ่งที่แสดงขนาดหรือมิติของเมทริกซ์ ซึ่งในที่นี้ $m \times n$ แสดงว่า เมทริกซ์นั้นมีอยู่ m แถว (row) และ n หลัก (column)

ตัวเลขที่อยู่ในเมทริกซ์แต่ละตัว เรียกว่า สมาชิก (element) ของเมทริกซ์ ซึ่งอาจจะเป็นจำนวนจริง จำนวนเชิงซ้อน ฟังก์ชันพหุนาม ก็ได้

การเขียนสมาชิกของเมทริกซ์ มี 2 วิธี คือ

1. ใช้ตัวอักษรต่างกัน เช่น $\begin{bmatrix} m & n & o \\ p & q & r \end{bmatrix}_{2\times 3}$

2. ใช้ตัวอักษรเดียว และใช้ตัวเลขเพื่อแสดงตำแหน่งเขียนห้อยไว้ด้านล่างขวามือ เช่น

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

ชนิดของเมทริกซ์

เมทริกซ์มีอยู่ด้วยกัน 9 ชนิด ดังนี้

1. **เมทริกซ์แถว** (Row Matrix) คือ เมทริกซ์ที่มีอยู่เพียง 1 แถว สำหรับหลักจะมีกี่หลักก็ได้ เช่น

$$A = [1\ 2\ 4\ {-5}]$$

$$B = [4]$$

2. **เมทริกซ์หลัก** (Column Matrix) คือ เมทริกซ์ที่มีอยู่เพียง 1 หลัก สำหรับแถวจะมีกี่แถวก็ได้ เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

3. **เมทริกซ์ศูนย์** (Zero Matrix or Null Matrix) คือ เมทริกซ์ที่มีสมาชิกทุกตัวเป็นศูนย์ โดยทั่วไปเขียนแทนด้วย $\underline{0}$ เช่น

$$\underline{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ หรือ } \underline{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. **เมทริกซ์จัตุรัส** (Square Matrix) คือ เมทริกซ์ที่มีจำนวนแถวเท่ากับจำนวนหลัก เช่น

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 7 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

5. **เมทริกซ์เอกลักษณ์** (Identity Matrix) คือ เมทริกซ์จัตุรัสที่สมาชิกในแนวเส้นทแยงมุมหลัก (Main Diagonal) เป็น 1 ส่วนสมาชิกที่อยู่เหนือและใต้เส้นทแยงมุมหลักเป็น 0 ทั้งหมด

เมทริกซ์เอกลักษณ์มีสัญลักษณ์ใช้คือ I, I_n หรือ $I_{n \times n}$ เช่น

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} , \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6. **เมทริกซ์เชิงสเกลาร์** (Scalar Matrix) คือ เมทริกซ์จัตุรัสที่สมาชิกในแนวเส้นทแยงมุมหลัก (Main Diagonal) เป็นตัวเลขที่เหมือนกัน ส่วนสมาชิกที่อยู่เหนือและใต้เส้นทแยงมุมหลักเป็นศูนย์ทั้งหมด เช่น

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{หรือ} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

7. **เมทริกซ์ทแยงมุม** (Diagonal Matrix) คือ เมทริกซ์จัตุรัสที่สมาชิกในแนวเส้นทแยงมุมหลัก (Main Diagonal) เป็นตัวเลขที่แตกต่างกัน ส่วนสมาชิกที่อยู่เหนือและใต้เส้นทแยงมุมหลักเป็นศูนย์ทั้งหมด เช่น

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{หรือ} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

8. **เมทริกซ์สามเหลี่ยมบน** (Upper Triangular Matrix) คือ เมทริกซ์จัตุรัสที่สมาชิกใต้เส้นทแยงมุมหลักเป็นศูนย์ทั้งหมด เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

และจะเป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบนที่แท้จริง เมื่อเมทริกซ์สามเหลี่ยมบนนั้นมีสมาชิกในแนวเส้นทแยงมุมหลัก (Main Diagonal) เป็นศูนย์ด้วย เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

9. **เมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง** (Lower Triangular Matrix) คือ เมทริกซ์จัตุรัสที่สมาชิกเหนือเส้นทแยงมุมหลัก (Main Diagonal) เป็นศูนย์ทั้งหมด เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

และจะเป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมล่างที่แท้จริง เมื่อเมทริกซ์สามเหลี่ยมล่างนั้นมีสมาชิกในแนวเส้นทแยงมุมหลัก (Main Diagonal) เป็นศูนย์ด้วย เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

การดำเนินการของเมทริกซ์

การดำเนินการของเมทริกซ์มีดังนี้ ได้แก่ การบวกเมทริกซ์ การลบเมทริกซ์ การคูณเมทริกซ์ด้วยสเกลาร์หรือจำนวนจริง และการคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์ ซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ $D = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 7 \\ 5 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ $E = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

จงหา $A+B$, $A-B$, $2A$, $-3B$, AC, DA, E^2, AD

$$A+B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+1 & 3+2 \\ -1+3 & 0+4 \\ 2+5 & 1+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 4 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A-B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-1 & 3-2 \\ -1-3 & 0-4 \\ 2-5 & 1-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -4 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}$$

$$2A = 2\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(4) & 2(3) \\ 2(-1) & 2(0) \\ 2(2) & 2(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ -2 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$-3B = -3\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3(1) & -3(2) \\ -3(3) & -3(4) \\ -3(5) & -3(6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ -9 & -12 \\ -15 & -18 \end{bmatrix}$$

$$AC = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4(1)+3(0) & 4(3)+3(4) & 4(2)+3(5) \\ -1(1)+0(0) & -1(3)+0(4) & -1(2)+0(5) \\ 2(1)+1(0) & 2(3)+1(4) & 2(2)+1(5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 24 & 23 \\ -1 & -3 & -2 \\ 2 & 10 & 9 \end{bmatrix}$$

$$DA = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 7 \\ 5 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0(4)+(-1)(-1)+2(2) & 0(3)+(-1)0+2(1) \\ 3(4)+4(-1)+7(2) & 3(3)+4(0)+7(1) \\ 5(4)+1(-1)+(-3)2 & 5(3)+1(0)+(-3)1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 22 & 16 \\ 13 & 12 \end{bmatrix}$$

$$E \cdot E = E^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(1)+2(0) & 1(2)+2(3) \\ 0(1)+3(0) & 0(2)+3(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot D = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 7 \\ 5 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

AD คูณไม่ได้ $\because$ จำนวนแถวไม่เท่ากับจำนวนหลัก

เมทริกซ์สลับเปลี่ยน (Transpose of a Matrix)

เมทริกซ์สลับเปลี่ยน (Transpose of a Matrix) **ของเมทริกซ์ A** คือ เมทริกซ์ที่ได้จากการสลับเปลี่ยนของแถวและหลัก

เราใช้ A^t (อ่านว่า เอทรานสโพส) แทน เมทริกซ์สลับเปลี่ยนของ A

เช่น $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ จะได้ $A^t = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

เมทริกซ์ผกผันสำหรับการคูณ

นิยามที่ 6

ถ้า A และ B เป็นเมทริกซ์จตุรัส และ $AB = BA = I$ แล้ว เราจะกล่าวว่า B เป็นเมทริกซ์ผกผันสำหรับการคูณของ A หรืออินเวอร์สการคูณของ A และเขียนแทน B ด้วย A^{-1} (อ่านว่า เออินเวอร์ส)

ตัวอย่างที่ กำหนด $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$

จงแสดงให้เห็นจริงว่า B เป็นอินเวอร์สการคูณของ A

วิธีทำ B จะเป็นอินเวอร์สการคูณของ A เมื่อ $AB = BA = I$

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

เนื่องจาก $AB = BA = I$

นั่นคือ B เป็นอินเวอร์สของ A

ใบความรู้ ๗

ดีเทอร์มิแนนต์ (Determinants)

ความหมายของดีเทอร์มิแนนต์

ดีเทอร์มิแนนต์หรือตัวกำหนด (Determinants) เป็นจำนวนจริง (Real Number) ที่อยู่คู่กับเมทริกซ์จัตุรัสทุกเมทริกซ์ ดีเทอร์มิแนนต์มีประโยชน์ในการนำไปประยุกต์ใช้เป็นอย่างมาก เช่น การแก้ระบบสมการ ซึ่งจะได้ศึกษากันในหน่วยต่อไป

สำหรับเมทริกซ์จัตุรัส A ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ A เขียนแทนด้วย det(A) หรือ det.A หรือ $|A|$ ซึ่งในที่นี้จะใช้ det.A แทนดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ A

นิยามที่ 1 ถ้า $A = [a_{11}]$ แล้ว $\det.A = |a_{11}| = a_{11}$

เช่น 1. $A = [5]$ จะได้ $\det A = |5| = 5$

2. $B = [-13]$ จะได้ $\det.B = |-13| = -13$

ในที่นี้ สัญลักษณ์ $|\ |$ ไม่ใช่ค่าสัมบูรณ์ ดังนั้นจึงได้ $|-13| = -13$ ไม่ใช่ 13

จากนิยามที่ 1 จะใช้สำหรับหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์มิติ 1×1 เท่านั้น สำหรับดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์จัตุรัส n×n เราเรียกว่า ดีเทอร์มิแนนต์อันดับ n

เช่น 1. ถ้า $A = [15]$ เรียก det.A ว่า ดีเทอร์มิแนนต์อันดับ 1

2. ถ้า $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$ เรียก det.B ว่า ดีเทอร์มิแนนต์อันดับ 2

การหาดีเทอร์มิแนนต์อันดับ 2 ขึ้นไป มีวิธีการดังนี้

การหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ โดยการคูณทแยง

การหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ โดยการคูณทแยง จะใช้หาค่าดีเทอร์มิแนนต์อันดับ 2 และ 3 เท่านั้น

นิยามที่ 2 กำหนด $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

$$\det.A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

ดีเทอร์มิแนนต์ อันดับ 2 ได้จากผลคูณของสมาชิกในแนวเส้นทแยงมุมหลัก จากซ้ายบนไปขวาล่าง ลบด้วยผลคูณของสมาชิกในแนวเส้นทแยงมุมจากซ้ายล่างไปขวาบน

ตัวอย่างที่ จงหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ต่อไปนี้

1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ 2) $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

3) $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

วิธีทำ 1) $\det.A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = (1)(2) - (5)(3) = -13$

2) $\det.B = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = (3)(-2) - (4)(5) = -26$

3) $\det.C = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = (1)(4) - (-2)(-3) = -2$

การหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ โดยการคูณทแยง

การหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ โดยการคูณทแยง จะใช้หาค่าดีเทอร์มิแนนต์อันดับ 2 และ 3 เท่านั้น

นิยามที่ 2 กำหนด $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

$$\det.A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

ดีเทอร์มิแนนต์ อันดับ 2 ได้จากผลคูณของสมาชิกในแนวเส้นทแยงมุมหลัก จากซ้ายบนไปขวาล่าง ลบด้วยผลคูณของสมาชิกในแนวเส้นทแยงมุมจากซ้ายล่างไปขวาบน

ตัวอย่างที่ จงหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ต่อไปนี้

1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ 2) $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

3) $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

วิธีทำ

1) $\det.A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = (1)(2) - (5)(3) = -13$

2) $\det.B = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = (3)(-2) - (4)(5) = -26$

3) $\det.C = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = (1)(4) - (-2)(-3) = -2$

นิยามที่ 3

กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

$$\det.A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$\det.A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$

ในการหาดีเทอร์มิแนนต์อันดับ 3 นั้น เราอาจหาได้โดยการนำสมาชิกในหลักที่ 1 และ 2 มาตั้งต่อหลักที่ 3 เป็นหลักที่ 4 และ 5 ค่าดีเทอร์มิแนนต์จะหาได้โดย นำผลบวกของผลคูณของสมาชิกจากซ้ายบนลงมาขวาล่าง ลบด้วยผลบวกของผลคูณของสมาชิกจากซ้ายล่างไปขวาบน ดังนี้

$$\begin{array}{|ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

จะได้ $\det.A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$

ตัวอย่างที่ กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \\ 5 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

จงหา det.A

วิธีทำ

$$\det.A = \begin{array}{|ccc|cc} 1 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 & 4 & -2 \\ 5 & 3 & -1 & 5 & 3 \end{array}$$

$= (1)(-2)(-1) + (3)(5)(5) + (2)(4)(3) - (5)(-2)(2) - (3)(5)(1) - (-1)(4)(3)$

$= 2 + 75 + 24 - (-20) - 15 - (-12)$

$= 2 + 75 + 24 + 20 - 15 + 12$

$= 118$

นั่นคือ $\det.A = 118$

การหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ที่มีขนาดตั้งแต่ 4 × 4 เป็นต้นไป จะไม่สามารถหาค่าดีเทอร์มิแนนต์โดยวิธีคูณทแยงได้

ใบความรู้ 8

แอดจอยท์หรือส่วนผูกพันของเมทริกซ์

แอดจอยท์ (Adjoint) หรือส่วนผูกพันของเมทริกซ์ เป็นสิ่งที่จะนำไปสู่การหาเมทริกซ์ผกผันสำหรับการคูณ ซึ่งมีนิยามดังต่อไปนี้

นิยามที่ 1

ให้ $A = [a_{ij}]$ เป็น $n \times n$ เมทริกซ์ และ c_{ij} เป็นโคแฟกเตอร์ของ a_{ij} (cofactor of a_{ij}) ดังนั้น แอดจอยท์หรือส่วนผูกพันของ A เขียนแทนด้วย adj (A) คือ เมทริกซ์ $[c_{ij}]^T$

นั่นคือ $\text{adj}(A) = [c_{ij}]^T$

เมทริกซ์ผกผันสำหรับการคูณ

เมทริกซ์ผกผันสำหรับการคูณของเมทริกซ์ A มีทฤษฎีบทดังนี้

ทฤษฎีบทที่ 1

ให้ $A = [a_{ij}]$ เป็น n x n เมทริกซ์ A เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน ดังนั้น A จะมีเมทริกซ์ผกผันสำหรับการคูณของ A ซึ่งเขียนแทนด้วย A^{-1} และ

$$A^{-1} = \frac{1}{\det.A} \cdot \text{adj}(A)$$

จากทฤษฎีบทที่ 1 จะเห็นได้ว่า A จะมีเมทริกซ์ผกผันสำหรับการคูณได้ ก็ต่อเมื่อ $\det.A \neq 0$

ดังนั้น เมทริกซ์ไม่เอกฐานจะต้องมีดีเทอมิแนนต์ที่ไม่เท่ากับศูนย์

ตัวอย่างที่ 7.1 จงหา adj (A) เมื่อ , ดังหา A^{-1}

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ หาโคแฟกเตอร์ของสมาชิกทุกตัวของ A

$$c_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = (1)(2+9) = 11$$

$$c_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(-1-0) = 1$$

$$c_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = (1)(3+0) = 3$$

$$c_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(0-6) = 6$$

$$c_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (1)(3+0) = 3$$

$$c_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = (-1)(-9-0) = 9$$

$$c_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (1)(0+4) = 4$$

$$c_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)(9-2) = -7$$

$$c_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = (1)(6-0) = 6$$

จะได้ $$[c_{ij}] = \begin{bmatrix} 11 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 9 \\ 4 & -7 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \operatorname{adj}(A)$$

$$[c_{ij}]^T = \begin{bmatrix} 11 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & -7 \\ 3 & 9 & 6 \end{bmatrix} = \operatorname{adj}(A)$$

$$\det A' = \left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right|$$

$$= 6 + 0 - 6 - 0 + 27 + 0$$

$$= 27$$

$$A^{-1} = \frac{1}{27}\begin{vmatrix} 11 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & -7 \\ 3 & 9 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{11}{27} & \frac{6}{27} & \frac{4}{27} \\ \frac{1}{27} & \frac{3}{27} & \frac{-7}{27} \\ \frac{3}{27} & \frac{9}{27} & \frac{6}{27} \end{vmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{11}{27} & \frac{2}{9} & \frac{4}{27} \\ \frac{1}{27} & \frac{1}{9} & -\frac{7}{27} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & \frac{2}{9} \end{bmatrix}$$

การแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยกฎของคราเมอร์ (Cramer's Rule)

การแก้ระบบสมการด้วยวิธีนี้ ใช้ได้กับระบบสมการที่มี n ตัวแปร n สมการเท่านั้นและเพื่อจะแสดงให้เห็นวิธีการกฎของคราเมอร์ จะขอยกตัวอย่างสมการ ๓ ตัวแปร ๓ สมการดังนี้

$$
\begin{aligned}
a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= b_1 \\
a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= b_2 \\
a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= b_3
\end{aligned}
$$

ให้ Δ (delta) เป็นค่าดีเทอร์มิแนนต์ซึ่งสมาชิกประกอบด้วยสัมประสิทธิ์ของ x, y และ z เรียงตามลำดับจากหลักที่ ๑ ถึงหลักที่ ๓

$$
\therefore \quad \Delta = \begin{array}{c}
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x & y & z \end{array}
\end{array} \neq 0
$$

(สัมประสิทธิ์ของตัวแปร)

การหาค่า x, y และ z

$$
x \cdot \Delta = x \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
= \begin{array}{c} (1) \\ \begin{vmatrix} a_{11}x & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}x & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}x & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \end{array}
$$

$$
= \begin{array}{c} (2) \\ \begin{vmatrix} a_{11}x + a_{12}y & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}x + a_{22}y & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}x + a_{32}y & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \end{array}
= \begin{array}{c} (3) \\ \begin{vmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \end{array}
$$

$$
= \begin{array}{c} (4) \\ \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \end{array} = \Delta x
$$

$$
\therefore \; x = \frac{\Delta x}{\Delta}
$$

คำอธิบาย วิธีการหา x ใช้สมบัติของดีเทอร์มิแนนต์ ดังนี้

1. นำ x เข้าไปคูณหลักที่ 1 ของ Δ
2. นำ y คูณหลักที่ 2 แล้วนำไปบวกกับหลักที่ 1
3. นำ z คูณหลักที่ 3 แล้วนำไปบวกกับหลักที่ 1
4. แทนค่าคงตัวของระบบสมการ

การหาค่า y และ z สามารถกระทำได้ในทำนองเดียวกัน ซึ่งสามารถนำมาสรุปขั้นตอนการแก้ระบบสมการตามกฎคราเมอร์ได้ดังนี้

1. หา $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$

ถ้า $\Delta = 0$ ต้องแก้สมการโดยวิธีของเกาส์

2. หา Δx, Δy และ Δz ดังนี้

$$\Delta x = \begin{vmatrix} \boxed{b_1} & a_{12} & a_{13} \\ \boxed{b_2} & a_{22} & a_{23} \\ \boxed{b_3} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

นำค่าคงตัวของระบบสมการแทนสัมประสิทธิ์ของ x ใน Δ

$$\Delta y = \begin{vmatrix} a_{11} & \boxed{b_1} & a_{13} \\ a_{21} & \boxed{b_2} & a_{23} \\ a_{31} & \boxed{b_3} & a_{33} \end{vmatrix}$$

นำค่าคงตัวของระบบสมการแทนสัมประสิทธิ์ของ y ใน Δ

$$\Delta z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \boxed{b_1} \\ a_{21} & a_{22} & \boxed{b_2} \\ a_{31} & a_{32} & \boxed{b_3} \end{vmatrix}$$

นำค่าคงตัวของระบบสมการแทนสัมประสิทธิ์ของ z ใน Δ

3. คำตอบของระบบสมการ คือ

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta}; \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta}; \quad z = \frac{\Delta z}{\Delta}$$

ตัวอย่าง จงหาคำตอบของระบบสมการ

$$2x + y + z = 0$$

$$4x + 3y + 2z = 2$$

$$2x - y - 3z = 0$$

วิธีทำ

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-9 + 2) - (-12 - 4) + (-4 - 6) = -14 + 16 - 10 = -8$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0 - 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + 0 = -2(-3 + 1) = 4$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0 + 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + 0 = 2(-6 - 2) = -16$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 0 = -2(-2 - 2) = 8$$

$$\therefore\ x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{4}{-8} = -\frac{1}{2}$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-16}{-8} = 2$$

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{8}{-8} = -1$$

ใบความรู้ 10

เส้นตรง (Straight Lines)

การศึกษาเกี่ยวกับเส้นตรง มีความจำเป็นมากในวิชาช่างต่างๆ เส้นตรงที่จะศึกษาในหน่วยนี้จะเป็นเส้นตรงที่อยู่ในระบบพิกัดฉากสองมิติ

1. ระบบพิกัดฉาก ประกอบไปด้วยเส้นจำนวน 2 เส้น ที่ตั้งฉากกันบนระนาบเดียวกัน
2. ระยะทางระหว่างจุด 2 จุด $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ คือ

$$\left|P_1P_2\right| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_2)^2}$$

3. จุดกึ่งกลางระหว่างจุด 2 จุด $P_1(x_1, y_1)$ และ $Q(x_2, y_2)$ คือ $S(\bar{x}, \bar{y})$

$$\text{เมื่อ } (\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

4. ความชันของเส้นตรง เขียนแทนด้วย m คือ

$$m = \tan\theta \quad \text{เมื่อ } \theta \text{ คือมุมเอียงของเส้นตรง}$$

$$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

ตัวอย่างที่ จงหาระยะทางระหว่างจุด A = (4, -3) และ B = (2, 5)

วิธีทำ ให้ $(x_1, y_1) = (4, -3)$ และ $(x_2, y_2) = (2, 5)$

จากสูตร

$$\left|P_1P_2\right| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$\left|AB\right| = \sqrt{(2-4)^2+(5-(-3))^2}$$

$$= \sqrt{4+64}$$

$$\left|AB\right| = \sqrt{68}$$

ตัวอย่างที่ จงหาจุดกึ่งกลางของเส้นตรงที่เชื่อมจุด (-3, 2) กับจุด (5, 4)

วิธีทำ ให้ $(\bar{x}, \bar{y})$ เป็นจุดกึ่งกลางของเส้นตรงที่เชื่อมจุด (-3, 2) กับจุด (5, 4)

จาก $$\bar{x} = \frac{x_1+x_2}{2}$$

$$= \frac{-3+5}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

จาก $$\bar{y} = \frac{y_1+y_2}{2}$$

$$= \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

นั่นคือ จุดกึ่งกลาง คือ จุด (1, 3)

ใบความรู้ 11

เส้นขนานและเส้นตั้งฉาก (Parallel and Perpendicular Lines)

ความชันของเส้นตรง เป็นสิ่งที่บอกลักษณะหรือความเอียงของเส้นตรง ซึ่งมีวิธีการ

➲ เส้นขนาน (Parallel Lines)

นิยามที่ 4

ให้ L_1 และ L_2 เป็นเส้นตรงที่มีมุมเอียง θ_1 และ θ_2 ตามลำดับถ้า $\theta_1 = \theta_2$ เราจะกล่าวได้ว่า เส้นตรง L_1 ขนานกับ L_2 หรือ $L_1 // L_2$

ตัวอย่างที่

กำหนดให้ L_1 เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด (5, 4), (8, 7)

L_2 เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด (4, -1), (1, -4)

L_3 เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด (2, 1), (5, 4)

จงตรวจสอบดูว่า มีเส้นตรงใดขนานกัน และเส้นตรงใดเป็นเส้นตรงเดียวกัน

วิธีทำ ให้ m_1, m_2 และ m_3 เป็นความชันของเส้นตรง L_1, L_2 และ L_3

จาก $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$$m_1 = \frac{7-4}{8-5} = \frac{3}{3} = 1$$

$$m_2 = \frac{-4-(-1)}{1-4} = \frac{-3}{-3} = 1$$

$$m_3 = \frac{4-1}{5-2} = \frac{3}{3} = 1$$

นั่นคือ จะได้ L_1, L_2 และ L_3 เป็นเส้นตรงที่ขนานกัน และ L_1 กับ L_3 เป็นเส้นตรงเดียวกัน เพราะว่าต่างผ่านจุด (5, 4) เหมือนกัน

➲ เส้นตั้งฉาก (Perpendicular Lines)

ทฤษฎีบทที่ 3

> ให้ L_1 และ L_2 เป็นเส้นตรงที่มีความชัน m_1 และ m_2 ตามลำดับ
> จะได้ (1) L_1 ตั้งฉากกับ L_2 หรือ $L_1 \perp L_2$ ก็ต่อเมื่อ $m_1 m_2 = -1$
> (2) $m_1 m_2 = -1$ จะได้ L_1 ตั้งฉากกับ L_2 หรือ $L_1 \perp L_2$

ตัวอย่างที่ จงแสดงว่า เส้นตรงที่ผ่านจุด $P_1(5, -1)$ และ $P_2(-3, 2)$ ตั้งฉากกับเส้นตรงที่ผ่านจุด $Q_1(-3, 1)$ และ $Q_2(0, 9)$

วิธีทำ ให้ m_1 แทนความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด P_1 และ P_2
และ m_2 แทนความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด Q_1 และ Q_2

จาก $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

จะได้ $m_1 = \dfrac{2-(-1)}{-3-5} = \dfrac{3}{-8} = -\dfrac{3}{8}$

$m_2 = \dfrac{9-1}{0-(-3)} = \dfrac{8}{3}$

และพบว่า $m_1 m_2 = \left(-\dfrac{3}{8}\right)\left(\dfrac{8}{3}\right) = -1$

นั่นคือ เส้นตรงทั้งสองตั้งฉากกัน

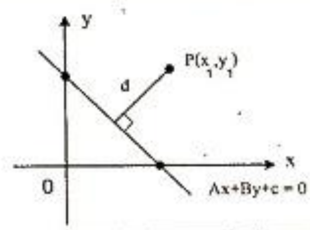
ระยะทางระหว่างจุดกับเส้นตรง

ทฤษฎีบทที่ 8

ถ้า d เป็นระยะทางระหว่างจุด $P(x_1, y_1)$ กับเส้นตรงที่มีสมการเป็น $Ax + By + C = 0$ จะได้

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

หมายเหตุ ระยะทางจากจุดไปยังเส้นตรง ในที่นี้ หมายถึงระยะทางในแนวตั้งฉาก ดังรูป



ตัวอย่างที่ จงหาระยะทางจากจุด (2, -3) กับเส้นตรง $3x + 4y - 4 = 0$

วิธีทำ จากสูตร $d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

แทนค่า $x_1 = 2,\ y_1 = -3,\ A = 3,\ B = 4,\ C = -4$

จะได้ $d = \frac{|3(2) + (4)(-3) + (-4)|}{\sqrt{3^2 + 4^2}}$

$= \frac{|-10|}{5} = \frac{10}{5} = 2$

นั่นคือ ระยะทางที่ต้องการ คือ 2 หน่วย

ระยะทางระหว่างเส้นตรงกับเส้นตรง

การหาระยะทางระหว่างจุดกับเส้นตรง สามารถนำไปประยุกต์หาระยะห่างระหว่างเส้นตรง 2 เส้นที่ขนานกันได้ โดยการหาจุดบนเส้นตรงใดเส้นตรงหนึ่ง ด้วยการกำหนดค่า x แล้วแก้สมการหาค่า y เมื่อได้จุดแล้วให้หาระยะทางระหว่างจุดนั้นไปยังเส้นตรงที่เราทราบสมการอีกเส้นหนึ่ง ดังตัวอย่าง

ซึ่งเราสามารถสรุปได้ว่า ถ้าเส้นตรง $L_1 : Ax_1 + By_1 + C_1 = 0$ ขนานกับเส้นตรง $L_2 : Ax_2 + By_2 + C_2 = 0$ แล้ว ระยะห่างระหว่าง L_1 และ L_2 คือ

$$d = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

ตัวอย่างที่ [illegible] ช่างโยธาออกแบบสร้างถนน 2 สายให้ขนานกัน โดยใช้ระบบพิกัดฉากในการคำนวณ โดยต้องการให้ถนนสายที่ 1 มีสมการเป็น $3x + 4y - 5 = 0$ และถนนสายที่ 2 มีสมการเป็น $3x + 4y + 4 = 0$ จงคำนวณหาระยะทางของถนน 2 สาย ห่างกันเท่าใด มีหน่วยเป็นกิโลเมตร

วิธีทำ ให้เส้นตรง L_1 เป็นสมการถนนสายที่ 1 $\quad 3x + 4y - 5 = 0$

และ ให้เส้นตรง L_2 เป็นสมการถนนสายที่ 2 $\quad 3x + 4y + 4 = 0$

หาจุดบนเส้นตรง L_2 โดยให้ $x = 0$ จะได้ $3(0) + 4y + 4 = 0,\ y = -1$

ดังนั้น จุด $(0, -1)$ อยู่บนเส้นตรง L_2

หาระยะทางระหว่างจุด $(0, -1)$ ไปยังเส้นตรง L_1 ; $3x + 4y - 5 = 0$

จาก $d = \dfrac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$; d = ระยะทางระหว่างถนนสายที่ 1 และสายที่ 2

แทนค่า $x_1 = 0$, $y_1 = -1$, $A = 3$, $B = 4$, $C = -5$

$$\text{จะได้ } d = \frac{|3(0) + 4(-1) + (-5)|}{\sqrt{3^2 + 4^2}}$$

$$= \frac{|-9|}{5} = \frac{9}{5} = 1.8$$

นั่นคือ ระยะทางระหว่างถนนสายที่ 1 และสายที่ 2 คือ 1.8 กิโลเมตร

ใบความรู้ 13

วงกลม (Circle)

นิยามที่ 1

วงกลม (Circle) คือ เซตหรือทางเดินของจุดที่มีระยะห่างจากจุดตรึง (Fixed Point) จุดหนึ่งเป็นระยะที่คงที่

จุดตรึง เรียกว่า จุดศูนย์กลาง ระยะที่คงที่ เรียกว่า รัศมี ทางเดินของจุด เรียกว่า เส้นรอบวง

สูตร	สมการวงกลม	จุดศูนย์กลาง	รัศมี (หน่วย)
	แบบมาตรฐาน $(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$	(h, k)	r
	แบบมาตรฐาน $x^2+y^2 = r^2$	$(0, 0)$	r
	แบบทั่วไป $x^2+y^2+Dx+Ey+F = 0$ (เมื่อ $D^2+E^2-4F > 0$)	$\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$	$\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$

ตัวอย่าง : จงหาสมการของวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิด และมีรัศมีเท่ากับ 5 หน่วย

วิธีคิด จากโจทย์ $r = 5$ แทนในสูตร 3.2 จะได้สมการวงกลมที่ต้องการ

วิธีทำ สูตร

$$x^2+y^2 = r^2$$

$$x^2+y^2 = 5^2$$

สมการวงกลมที่ต้องการคือ $x^2+y^2 = 25$

ตัวอย่างที่ จงหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลมที่มีสมการเป็น $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$

วิธีทำ จาก $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$

จัดสมการให้อยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์ ดังนี้

$$(x^2 - 4x) + (y^2 + 6y) = 12$$

$$\{x^2 - 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2\} + \{y^2 + 6y + \left(\frac{6}{2}\right)^2\} = 12 + \left(\frac{4}{2}\right)^2 + \left(\frac{6}{2}\right)^2$$

$$(x^2 - 4x + 2^2) + (y^2 + 6y + 3^2) = 12 + 4 + 9$$

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$$

$$(x - 2)^2 + (y - (-3))^2 = 5^2$$

จะได้ $(h, k) = (2, -3)$ และ $r = 5$

ใบความรู้ 14

พาราโบลา (Parabola)

นิยามที่ 3

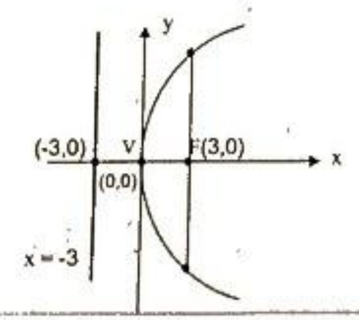
พาราโบลา (Parabola) คือ เซตหรือทางเดินของจุด ซึ่งแต่ละจุดจะมีระยะห่างจากจุดคงที่จุดหนึ่ง และเส้นตรงคงที่อีกเส้นหนึ่งเป็นความยาวที่เท่ากัน จุดคงที่นี้เรียกว่า จุดโฟกัส (Focus) เส้นตรงคงที่เรียกว่า เส้นไดเรกทริกซ์ (Directrix)

สรุปพาราโบลาที่มีจุดยอดที่จุดกำเนิด

สูตร	ลักษณะของพาราโบลา	สมการพาราโบลา	สมการไดเรกตริกซ์	จุดโฟกัส	ความยาวลาตัสเรกตัม
3.4(a)	หงาย $(c>0)$	$x^2 = 4cy$	$y = -c$	$(0, c)$	$\|4c\|$
3.4(b)	คว่ำ $(c<0)$				
3.5(a)	ตะแคงขวา $(c>0)$	$y^2 = 4cx$	$x = -c$	$(c, 0)$	
3.5(b)	ตะแคงซ้าย $(c<0)$				

ตัวอย่างที่1 จงหาสมการของพาราโบลาที่มีจุดโฟกัสอยู่ที่จุด F(3, 0) และมีเส้นไดเรกทริกซ์เป็น $x = -3$

วิธีทำ



จากรูปจะได้ $c = 3$

สมการพาราโบลา คือ $y^2 = 4|c|x$

$= 4|3|x$

$= 12x$

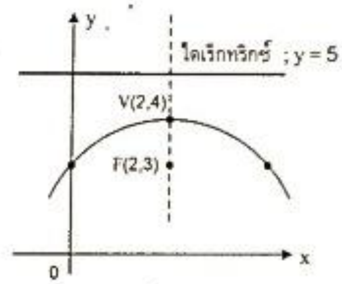
นั่นคือ สมการของพาราโบลา เป็น $y^2 = 12x$

สรุปพาราโบลาที่มีจุดยอดที่จุด (h, k)

สูตร	ลักษณะของพาราโบลา	สมการพาราโบลา	สมการไดเรกตริกซ์	จุดโฟกัส	ความยาวลาตัสเรกตัม
3.7(a)	หงาย $(c>0)$	$(x-h)^2 = 4c(y-k)$	$y = k-c$	$(h, k+c)$	$\|4c\|$
3.7(b)	คว่ำ $(c<0)$				
3.8(a)	ตะแคงขวา $(c>0)$	$(y-k)^2 = 4c(x-h)$	$x = h-c$	$(h+c, k)$	
3.8(b)	ตะแคงซ้าย $(c<0)$				

ตัวอย่างที่ จงหาสมการของพาราโบลาที่มีโฟกัสอยู่ที่จุด (2, 3) และมีเส้นตรง y = 5 เป็นไดเรกทริกซ์

วิธีทำ



จากรูป สมการพาราโบลาเปิดด้านล่าง

คือ $(x-h)^2 = -4|c|(y-k)$

และ $c = |4-3| = 1$, $h = 2$ และ $k = 4$

จะได้ $(x-2)^2 = -4(1)(y-4)$

$x^2 - 4x + 4 = -4y + 16$

$\therefore \quad x^2 - 4x + 4y - 12 = 0$

นั่นคือ สมการพาราโบลา คือ $x^2 - 4x + 4y - 12 = 0$

ใบความรู้ 15

วงรี (Ellipse)

> นิยามที่ 4
>
> วงรี (Ellipse) คือ เซตหรือทางเดินของจุดที่มีผลบวกของระยะทางจากจุดบนวงรีไปยังจุดคงที่ (Fixed Point) 2 จุด เป็นค่าคงตัว จุด 2 จุดนี้ เรียกว่า จุดโฟกัส (Focus)

สรุปวงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิด

ลักษณะแกนยาว / สูตร	แกนยาวทับแกน x	แกนยาวทับแกน y
สมการของวงรี	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$
จุดยอด	$(\pm a, 0)$	$(0, \pm a)$
จุดโฟกัส	$(\pm c, 0)$	$(0, \pm c)$
สมการไดเรกตริกซ์	$x = \pm\frac{a}{e}$	$y = \pm\frac{a}{e}$
ความยาวของแกนยาว	$2a$	
ความยาวของแกนสั้น	$2b$	
ความยาวลาตัสเรกตัม	$\frac{2b^2}{a}$	
ความเยื้องศูนย์กลาง	$e = \frac{c}{a}$	
ความสัมพันธ์ a, b, c	$b^2 = a^2 - c^2$	

ตัวอย่างที่ จงหาจุดโฟกัส ค่า e ความยาวแกนหลัก ความยาวแกนรองของวงรี $9x^2 + 5y^2 - 45 = 0$

วิธีทำ จาก

$$9x^2 + 5y^2 - 45 = 0$$

$$9x^2 + 5y^2 = 45$$

นำ 45 หารทั้ง 2 ข้าง

$$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$\frac{x^2}{(\sqrt{5})^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$$

จะได้ $a = 3,\ b = \sqrt{5}$

เนื่องจาก $a^2 = b^2 + c^2$ จะได้ $c^2 = a^2 - b^2 = 3^2 - (\sqrt{5})^2$

ดังนั้น $c = \sqrt{9-5} = 2$

$\therefore$ ค่า $e = \frac{c}{a} = \frac{2}{3}$

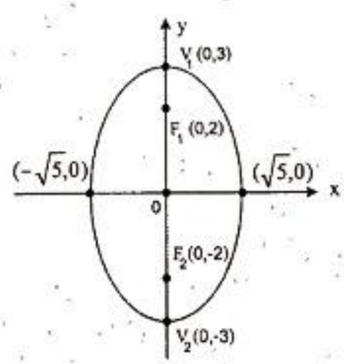
นั่นคือ จุดโฟกัส คือ จุด (0, 2) และจุด (0, -2)

ค่า $e = \frac{2}{3}$

ความยาวแกนหลัก $= 2a = 6$ หน่วย

ความยาวแกนรอง $= 2b = 2\sqrt{5}$ หน่วย

ดังรูป



ใบความรู้ ๑๖

สรุปวงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด (h, k)

ลักษณะแกนยาว / สูตร	แกนยาวขนานแกน x	แกนยาวขนานแกน y
สมการของวงรี	$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$
จุดยอด	$(h \pm a, k)$	$(h, k \pm a)$
จุดโฟกัส	$(h \pm c, k)$	$(h, k \pm c)$
สมการไดเรกตริกซ์	$x-h = \pm\frac{a}{e}$	$y-k = \pm\frac{a}{e}$
ความยาวของแกนยาว	2a	
ความยาวของแกนสั้น	2b	
ความยาวลาตัสเรกตัม	$\frac{2b^2}{a}$	
ความเยื้องศูนย์กลาง	$e = \frac{c}{a}$	
ความสัมพันธ์ a, b, c	$b^2 = a^2-c^2$	

ตัวอย่างที่ จงหาสมการของวงรีที่มีจุดโฟกัสอยู่ที่จุด (2, 2) และจุด (2, -4) มีจุดยอดอยู่ที่จุด (2, 3) และจุด (2, -5)

วิธีทำ เนื่องจากจุดโฟกัสอยู่ที่จุด (2, 2) และจุด (2, -4) ซึ่งมีค่าพิกัดตัวหน้า คือค่า $x = 2$ เท่ากัน แสดงว่าวงรีมีแกนหลักขนานกับแกน y

เนื่องจากจุดศูนย์กลางของวงรี เป็นจุดกึ่งกลางระหว่างจุดโฟกัสทั้งสอง

ดังนั้น $(h, k) = \left(\frac{2+2}{2}, \frac{2+(-4)}{2}\right) = (2, -1)$

$$a = \frac{1}{2}\left|3-(-5)\right| = 4, \quad c = \frac{1}{2}\left|2-(-4)\right| = 3$$

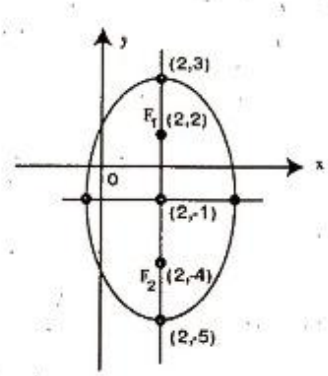
จาก $a^2 = b^2 + c^2$, $b^2 = a^2 - c^2 = 4^2 - 3^2 = 7$, $b = \sqrt{7}$

จากสมการรูปมาตรฐาน

$$\begin{aligned}
\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} &= 1 \\
\frac{(x-2)^2}{\left(\sqrt{7}\right)^2} + \frac{(y-(-1))^2}{4^2} &= 1 \\
\frac{(x-2)^2}{7} + \frac{(y+1)^2}{16} &= 1 \\
16(x-2)^2 + 7(y+1)^2 &= 112 \\
16(x^2 - 4x + 4) + 7(y^2 + 2y + 1) &= 112 \\
16x^2 - 64x + 64 + 7y^2 + 14y + 7 &= 112 \\
16x^2 + 7y^2 - 64x + 14y - 41 &= 0
\end{aligned}$$

นั่นคือ สมการของวงรี คือ $16x^2 + 7y^2 - 64x + 14y - 41 = 0$

ดังรูป



ใบความรู้ 17

สรุปไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิด

ลักษณะแกน / สูตร	แกนตามขวางทับแกน x	แกนตามขวางทับแกน y
สมการของไฮเพอร์โบลา	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$
จุดยอด	$(\pm a, 0)$	$(0, \pm a)$
จุดโฟกัส	$(\pm c, 0)$	$(0, \pm c)$
สมการไดเรกตริกซ์	$x = \pm \frac{a}{e}$	$y = \pm \frac{a}{e}$
สมการเส้นกำกับ	$y = \pm \frac{b}{a}x$	$y = \pm \frac{a}{b}x$
ความยาวของแกนตามขวาง	$2a$	
ความยาวของแกนสังยุค	$2b$	
ความยาวลาตัสเรกตัม	$\frac{2b^2}{a}$	
ความเยื้องศูนย์กลาง	$e = \frac{c}{a}$	
ความสัมพันธ์ของ a, b, c	$b^2 = c^2 - a^2$	

ตัวอย่างที่ จงหาจุดโฟกัส, จุดยอด ค่า e สมการของเส้นกำกับของไฮเพอร์โบลา
$4x^2 - 9y^2 + 36 = 0$

วิธีทำ

จาก $4x^2 - 9y^2 + 36 = 0$

จะได้ $4x^2 - 9y^2 = -36$

นำ -36 หารตลอด

$$-\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$\frac{y^2}{2^2} - \frac{x^2}{3^2} = 1$$

เทียบกับสมการไฮเพอร์โบลาที่แกนอยู่บนแกน y คือ $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

จะได้ $a = 2$, $b = 3$

จาก $c^2 = a^2 + b^2$, $c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{2^2+3^2}$ จะได้ $c = \sqrt{13}$

จุดโฟกัส คือ $(0, -c)$ และ $(0, c)$ จะได้ $F_2(0, -\sqrt{13})$ และ $F_1(0, \sqrt{13})$

จุดยอด คือ $(0, -a)$ และ $(0, a)$ จะได้ $V_2(0, -2)$ และ $V_1(0, 2)$

จาก $e = \frac{c}{a}$ จะได้ $c = \frac{\sqrt{13}}{2}$

สมการเส้นกำกับ L_1 คือ $y = \frac{a}{b}x$

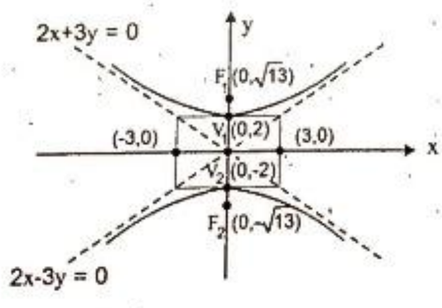
$$y = \frac{2}{3}x$$

$$2x - 3y = 0$$

สมการเส้นกำกับ L_2 คือ $y = -\frac{a}{b}x$

$$y = -\frac{2}{3}x$$

$$2x + 3y = 0$$



นั่นคือ จุดโฟกัส คือ $(0, -\sqrt{13})$ และ $(0, \sqrt{13})$

ยอด คือ $(0, -2)$ และ $(0, 2)$

ค่า $e = \frac{\sqrt{13}}{2}$

สมการเส้นกำกับ คือ $2x - 3y = 0$

และ $2x + 3y = 0$

สรุปไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด (h, k)

ลักษณะแกน / สูตร	**แกนตามขวางขนานแกน x**	**แกนตามขวางขนานแกน y**
สมการของไฮเพอร์โบลา	$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$
จุดยอด	$(h \pm a, k)$	$(h, k \pm a)$
จุดโฟกัส	$(h \pm c, k)$	$(h, k \pm c)$
สมการไดเรกตริกซ์	$x - h = \pm \frac{a}{e}$	$y - k = \pm \frac{a}{e}$
สมการเส้นกำกับ	$y - k = \pm \frac{b}{a}(x-h)$	$y - k = \pm \frac{a}{b}(x-h)$
ความยาวของแกนตามขวาง	$2a$	
ความยาวของแกนสังยุค	$2b$	
ความยาวลาตัสเรกตัม	$\frac{2b^2}{a}$	
ความเยื้องศูนย์กลาง	$e = \frac{c}{a}$	
ความสัมพันธ์ของ a, b, c	$b^2 = c^2 - a^2$	

หมายเหตุ a = ระยะครึ่งแกนตามขวาง = ระยะจากจุดศูนย์กลางถึงจุดยอด

b = ระยะครึ่งแกนสังยุค

c = ระยะจากจุดศูนย์กลางถึงจุดโฟกัส

ตัวอย่างที่

จงหาสมการของไฮเพอร์โบลา สมการของเส้นกำกับ ค่าของ e จุดยอด จุดศูนย์กลางของไฮเพอร์โบลาที่มีจุดโฟกัสอยู่ที่จุด (-3, 2) และจุด (5, 2) และมีค่าคงตัวเป็น 4

วิธีทำ

เนื่องจากจุดโฟกัสอยู่ที่ (-3, 2) และ (5, 2) ทำให้ทราบว่าเป็นไฮเพอร์โบลาที่มีแกนขนานกับแกน x

$c = \frac{1}{2}$ ของระยะห่างของจุดโฟกัส , $c = \frac{1}{2}|5-(-3)|$ จะได้ $c = 4$

โจทย์กำหนดค่าคงตัวเป็น 4 นั่นคือ $2a = 4$ จะได้ $a = 2$

จาก $b^2 = c^2 - a^2$, $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12}$ จะได้ $b = 2\sqrt{3}$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{2} = 2$$

จุดศูนย์กลางของไฮเพอร์โบลา เป็นจุดกึ่งกลางของจุดโฟกัสทั้งสอง

นั่นคือ จุดศูนย์กลาง $= \left(\frac{-3+5}{2}, \frac{2+2}{2}\right) = (1, 2)$

จะได้ $h = 1$, $k = 2$

สมการของเส้นกำกับ L_1 คือ $y - k = \frac{b}{a}(x - h)$

$$y - 2 = \frac{2\sqrt{3}}{2}(x - 1)$$

$$y - 2 = \sqrt{3}(x - 1)$$

$$\sqrt{3}x - y + 2 - \sqrt{3} = 0$$

สมการของเส้นกำกับ L_2 คือ $y - k = -\frac{b}{a}(x-h)$

$$y - 2 = -\frac{2\sqrt{3}}{2}(x - 1)$$

$$y - 2 = -\sqrt{3}(x - 1)$$

$$\sqrt{3}x + y - 2 - \sqrt{3} = 0$$

จุดยอด = $(h - a, k)$ และ $(h + a, k)$

= $(1 - 2, 2)$ และ $(1 + 2, 2)$

= $(-1, 2)$ และ $(3, 2)$

สมการของไฮเพอร์โบลาที่มีแกนขนานกับแกน x คือ

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(x-1)^2}{2^2} - \frac{(y-2)^2}{(2\sqrt{3})^2} = 1$$

$$\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{12} = 1$$

นำ 12 คูณตลอด

$$3(x-1)^2 - (y-2)^2 = 12$$

$$3(x^2-2x+1) - (y^2-4y+4) = 12$$

$$3x^2 - 6x + 3 - y^2 + 4y - 4 - 12 = 0$$

$$3x^2 - y^2 - 6x + 4y - 13 = 0$$

นั่นคือ สมการไฮเพอร์โบลา $3x^2 - y^2 - 6x + 4y - 13 = 0$

สมการเส้นกำกับ คือ $\sqrt{3}x - y + 2 - \sqrt{3} = 0$

และ $\sqrt{3}x + y - 2 - \sqrt{3} = 0$

ค่า $e = 2$

จุดยอด คือ (-1, 2) และ (3, 2)

จุดศูนย์กลาง คือ (1, 2)